Calcul de $\sqrt{2}$ avec l'algorithme de Babylone

Y. Delhaye

Introduction

L'algorithme de Babylone est une technique qui permet de trouver très rapidement avec une grande précision une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre.

Nous allons ici découvrir l'algorithme de Babylone via un exemple : le calcul de la racine carrée de 2.

1 La question

Calculez $\sqrt{2}$ avec une précision de 4 chiffres après la virgule en utilisant l'algorithme de Babylone.

A Reformulation de la question

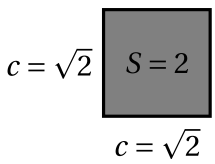
La définition de la racine carrée y d'un nombre réel positif x que nous connaissons est celle-ci :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists! y \in \mathbb{R}^+ : y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x \qquad (1)$$

On cherche donc le y tel que $y^2 = 2$.

B Point de vue géométrique

En terme de "mesure", on pourrait dire que nous cherchons la longueur des côtés d'un carré dont la surface est 2.



2 L'algorithme

La technique avait été appliquée par les babyloniens dans l'antiquité.

Sur la tablette d'argile représentée ci-dessus, un babylonien a écrit une valeur approximative de $\sqrt{2}$ en écriture cunéiforme.

A L'idée

L'idée générale est d'approcher la valeur correcte en la "piégeant" entre deux valeurs extrêmes : les longueurs des côtés d'un rectangle dont la surface vaut 2. En mathématique, on dit qu'on va réaliser un "encadrement" de $\sqrt{2}$.

$$l < \sqrt{2} < L \tag{2}$$

Si on rend le rectangle " de plus en plus carré", la longueur et la largeur du rectangle vont être de plus en plus proches.

Ces longueurs vont alors se rapprocher la longueur du côté du carré recherché.

Il faut donc trouver une méthode où, à chaque étape, la différence entre longueur et largeur du rectangle devient de plus en plus petite.

B Moyennes

Le principe de l'algorithme est de prendre un premier rectangle de longueur L_1 et de largeur l_1 telles que $L_1 \cdot l_1 = 2$. Le choix de L_1 est à priori arbitraire.

$$L_1 \cdot l_1 = 2 \tag{3}$$

Puis de construire un deuxième rectangle dont la longueur sera la moyenne de L_1 et de l_1 .

$$L_2 = \frac{L_1 + l_1}{2} \tag{4}$$

L_2 sera donc compris entre L_1 et l_1.

$$l_1 < L_2 < L_1 \tag{5}$$

La surface de ce deuxième rectangle reste 2.

$$L_2 \cdot l_2 = 2 \tag{6}$$

Ceci permet de calculer la largeur de deuxième rectangle.

$$l_2 = \frac{2}{L_2} \tag{7}$$

l_2 sera aussi compris entre L_1 et l_1.

$$l_1 < l_2 < L_1 \tag{8}$$

La racine de deux sera comprise entre l_2 et L_2 :

$$l_2 < \sqrt{2} < L_2 \tag{9}$$

Mais comme L_2 et l_2 sont compris entre l_1 et L_1, on a gagné en précision :

$$l_1 < l_2 < \sqrt{2} < L_2 < L_1 \tag{10}$$

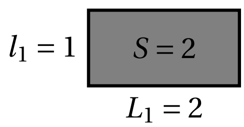
En répétant l'opération, on va "coincer" $\sqrt{2}$ entre des couples de valeurs L et l de plus en plus proches.

$$l_1 < l_2 < l_3 < \sqrt{2} < L_3 < L_2 < L_1 \tag{11}$$

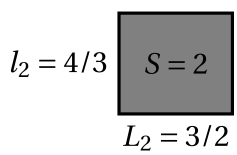
$$l_1 < l_2 < l_3 < l_4 < \sqrt{2} < L_4 < L_3 < L_2 < L_1 \tag{12}$$

3 Le calcul détaillé étape par étape

1. Construisons donc un premier rectangle quelconque dont la surface vaut 2 unités (carrées) .
   (a) Longueur $L_1 = 2$ et largeur $l_1 = 1$
   (b) La surface S est bien $S = 2 \times 1 = 2$



   La différence entre L_1 et l_1 est de 1.
   (c) On peut affirmer que $1 < \sqrt{2} < 2$.
2. Construisons maintenant un deuxième rectangle dont la surface vaut 2 unités (carrées) .
   (a) La longueur de ce rectangle sera la moyenne arithmétique des longueur et largeur du précédent. Ici :
   $$L_2 = \frac{L_1 + l_1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}500\,00$$
   (b) Pour que la surface de ce rectangle soit $S = 2$, il faut diviser cette surface S par cette nouvelle longueur L_2. Ici :
   $$l_2 = \frac{S}{L_2} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \simeq 1{,}333\,33$$
   (c) Longueur $L_2 = \frac{3}{2}$ et largeur $l_2 = \frac{2}{\frac{3}{2}}$
   (d) La surface S est bien $S = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$



   Remarquons au passage que la forme du rectangle est "moins rectangulaire" est "plus carrée". La différence entre L_2 et l_2 est inférieure à 0,2.

(e) On peut affirmer que $1{,}33333 < \sqrt{2} < 1{,}50000$.

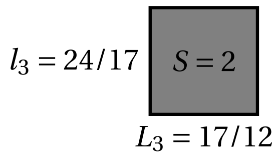
3. Construisons maintenant un troisième rectangle dont la surface vaut 2 unités (carrées) sur le même principe. [1]

   (a) La longueur de ce rectangle sera la moyenne arithmétique des longueur et largeur du précédent.
   Ici :
   $$L_3 = \frac{L_2 + l_2}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12} \simeq 1{,}41667$$

   (b) Pour que la surface de ce rectangle soit $S = 2$, il faut diviser cette surface S par cette nouvelle longueur L_3. Ici :
   $$l_3 = \frac{S}{L_3} = \frac{2}{\frac{17}{12}} \simeq 1{,}41176$$

   (c) Longueur $L_3 = \frac{17}{12}$ et largeur $l_3 = \frac{24}{17}$

   (d) La surface S est bien $S = \frac{17}{12} \times \frac{24}{17} = 2$



   La forme du rectangle est pratiquement devenue celle du carré. Si l'unité est le centimètre, la différence de longueur entre les deux côtés est approximativement d'un vingtième de millimètre ce qui correspond à l'épaisseur d'un demi grain de poussière. Ce qui est invisible à l'œil nu.

   (e) On peut affirmer que $1{,}41176 < \sqrt{2} < 1{,}41667$.

   (f) Ces bornes inférieure et supérieure de $\sqrt{2}$ ont leur trois premiers chiffres en commun. Nous avons une précision à *trois chiffres significatifs* càd. de deux chiffres après la virgule.

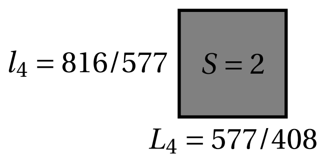
4. Construisons maintenant un quatrième rectangle toujours sur le même principe.

   (a) La longueur de ce rectangle sera la moyenne arithmétique des longueur et largeur du précédent.
   Ici :
   $$L_4 = \frac{L_3 + l_3}{2} = \frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408} \simeq 1{,}41422$$

   (b) Pour que la surface de ce rectangle soit $S = 2$, il faut diviser cette surface S par cette nouvelle longueur L_4. Ici :
   $$l_4 = \frac{S}{L_4} = \frac{2}{\frac{577}{408}} \simeq 1{,}41421$$

   (c) Longueur $L_4 = \frac{577}{408}$ et largeur $l_4 = \frac{816}{577}$

   (d) La surface S est bien $S = \frac{577}{408} \times \frac{816}{577} = 2$



1. Attention, il faut faire TOUS les calculs avec des fractions. Les valeurs numériques décimales ne servent qu'à trouver l'encadrement à la fin de chaque étape.

La forme du rectangle est indiscernable de celle du carré. Si l'unité est le centimètre, la différence de longueur entre les deux côtés est de l'ordre du dix millième de millimètre (l'épaisseur d'une "grosse" molécule organique)

(e) On peut affirmer que $1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$.

(f) Ces bornes inférieure et supérieure de $\sqrt{2}$ ont cinq chiffres en commun. Nous avons une précision à *cinq chiffres significatifs* càd. de quatre chiffres après la virgule .

C'était notre objectif!

5. Nous avons "rempli notre contrat". Néanmoins, construisons finalement un cinquième rectangle sur le même principe.

(a) La longueur de ce rectangle sera la moyenne arithmétique des longueur et largeur du précédent.

Ici :

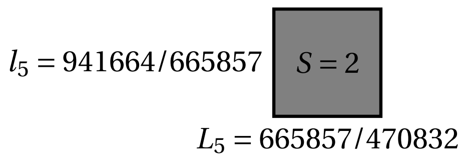
$$L_5 = \frac{L_4 + l_4}{2} = \frac{\frac{577}{408} + \frac{816}{577}}{2} = \frac{665857}{470832} \simeq 1{,}414213562375$$

(b) Pour que la surface de ce rectangle soit $S = 2$, il faut diviser cette surface S par cette nouvelle longueur L_5. Ici :

$$l_5 = \frac{S}{L_5} = \frac{2}{\frac{665857}{470832}} \simeq 1{,}414213562372$$

(c) Longueur $L_5 = \frac{665857}{470832}$ et largeur $l_5 = \frac{941664}{665857}$

(d) La surface S est bien $S = \frac{665857}{470832} \times \frac{941664}{665857} = 2$



La forme du rectangle est indiscernable de celle du carré. Si l'unité est le centimètre, la différence de longueur entre longueur et largeur est de l'ordre du millième de milliardième de millimètre. C'est la taille d'un noyau atomique[2] !

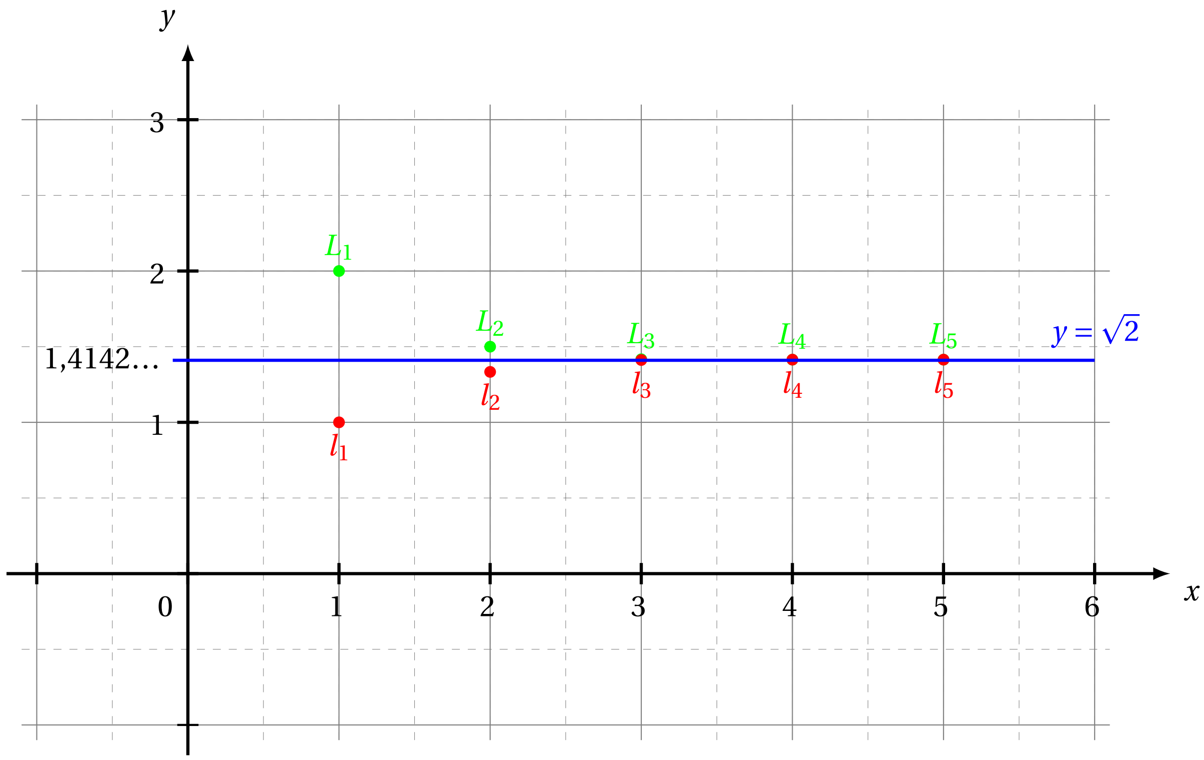
(e) On peut affirmer que $1{,}414213562372 < \sqrt{2} < 1{,}414213562375$.

(f) Ces bornes inférieure et supérieure de $\sqrt{2}$ ont douze chiffres en commun. Nous avons une précision à *douze chiffres significatifs* càd. de onze chiffres après la virgule .

2. Les mesures les plus exactes à ce jour de la taille du proton donnent des valeurs proches de 0,8 fm.

4 En plus

A Illustration de la convergence



Nous pouvons ici visualiser la convergence de l'algorithme. À chaque étape l'écart entre L et l diminue et les deux nombres se rapprochent de $\sqrt{2}$.

B Tableaux

Les calculs s'organisent plus facilement s'ils sont ordonnés dans des tableaux.

L	l
2	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$
$\frac{577}{408}$	$\frac{816}{577}$
$\frac{665857}{470832}$	$\frac{941664}{665857}$

L	l
2	1
1,50000	1,33333
1,50000	1,33333
1,41667	1,41176
1,41422	1,41421
1,414213562375	1,414213562372

5 Généralisation

La méthode est applicable à la recherche d'autres racines carrées.
Essayez avec $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$ ...
La convergence est toujours très rapide.

6 Conclusion

Nous avons donc trouvé, en seulement quatre étapes (dont seulement trois avec des calculs non triviaux), une valeur numérique de $\sqrt{2}$ correcte à quatre chiffres après la virgule.

C'est une caractéristique de l'algorithme de Babylone de gagner grandement en précision à chaque étape successive. On dit que l'algorithme de Babylone "*converge très rapidement*".

L'algorithme peut s'appliquer au calcul de n'importe quelle racine carrée.

La méthode est en tout cas beaucoup plus rapide que par essais-erreurs.