Cours de Physique

Mécanique

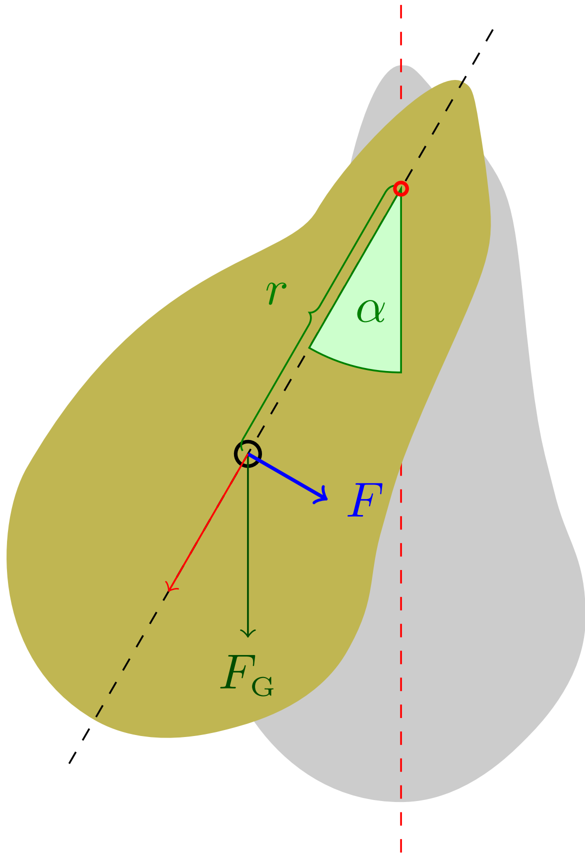
Yves DELHAYE

2004-2016

Cours de mécanique

Yves Delhaye

2016



Copyright (c) 2004-2016 Yves Delhaye
Ce document est sous licence Creative Common CC BY-NC-SA

Paternité-Pas d'Utilisation Commerciale-Partage des Conditions Initiales à l'Identique 2.0 France

- Vous êtes libres :
  - de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public,
  - de modifier cette création.
- Selon les conditions suivantes :
  - Paternité : Vous devez citer le nom de l'auteur original de la manière indiquée par l'auteur de l'oeuvre ou le titulaire des droits qui vous confère cette autorisation (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'oeuvre).
  - Pas d'Utilisation Commerciale : Vous n'avez pas le droit d'utiliser cette création à des fins commerciales. [1]
  - Partage des Conditions Initiales à l'Identique : Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette création, vous n'avez le droit de distribuer la création qui en résulte que sous un contrat identique à celui-ci.
- voir `http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/legalcode`

1. Vous pouvez cependant faire des copies et les distribuer à prix coûtant (par exemple à vos élèves).

Sommaire

Première partie

Métrologie

Chapitre 1

Les unités de mesures

Sommaire

Introduction

Lorsqu'on fait de la physique, on fait des calculs impliquant des grandeurs "concrètes" : ainsi, des vitesses sont multipliées par des temps. On mesure ces grandeurs et il faut s'accorder avec d'autres pour communiquer ces résultats et ces calculs de manière cohérente.

Les scientifiques utilisent des systèmes d'unités pour lesquels ils se sont accordés internationalement. Les unités de la vie de tous les jours représentent une petite partie de ces unités.

Remarque 1. Il faut bien faire la distinction entre grandeur (par exemple, une longueur) et unité (ici le mètre).

Une hauteur, une largeur auront pour unité le mètre. Pourtant votre hauteur n'est pas identique à votre largeur.

1 Le système international d'unités

Jusqu'à la fin du dix huitième siècle, de multiples systèmes d'unités existaient. Un commerçant qui achetait cinq toises de tissu à Lyon, à Paris, Lille, Bruxelles ou Berlin recevait à chaque fois des longueurs différentes de tissu.

Les industriels, les commerçants et les scientifiques de cette fin du dix huitième siècle ont donc ressenti la nécessité de rationaliser les mesures. C'est après la révolution française que le système international d'unités s'est imposé.

A Le système SI

Le système international d'unités (ou système SI) est un système *décimal*. Toutes les unités mesurant un même type de grandeur ont des rapports entre elles qui sont des puissances de dix. (exemple : $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$)

Les unités de temps usuelles représentent la seule exception. (60 secondes par minutes, 24 heures dans une journée, 365,25 jours par an)

Il existe encore de nos jours un système "unifié" qui n'est pas le système international : le système "impérial" que nombre d'américains continuent à utiliser. Ce système n'est pas décimal ! (Il faut 12 pouces pour faire un pied, trois pieds pour faire un yard et 1760 yards pour faire un mile.) Les erreurs d'arrondi ont tendance à s'accumuler de manière problématique dès que l'ont fait des calculs non élémentaires.

(suggestion d'exercice pour vous en convaincre : Si un camion consomme deux pieds cubiques de carburant pour faire cent miles, à quelle vitesse passe le carburant dans le tuyau à la sortie du réservoir si ce tuyau fait cinq pouces de diamètre ?)

a) Majuscule ou minuscule

Avant de commencer, faisons une remarque sur l'écriture des unités. La distinction entre majuscules et minuscules est importante. Les unités dont le nom correspond au nom d'une personne auront un nom écrit en minuscule puisqu'il s'agit dès lors d'un nom commun (mais ce n'est pas nécessairement le cas pour le symbole) : Lord Kelvin donne son nom au kelvin, symbole K.

b) les unités de base

Toutes les unités de la physique peuvent être ramenée à des produits de puissances de quelques unités de base. Ainsi l'unité de vitesse $\mathrm{m\,s^{-1}}$ est clairement le rapport de l'unité de longueur par l'unité de temps.

(i) mksA Le système dit "mksA" est l'ancêtre du système international d'unités. Dans ce système, toutes les unités sont exprimables à partir de quatre unités de base : le mètre, le kilogramme, la seconde et l'ampère.

(i).1 Le mètre La définition initiale du mètre était que cette longueur représentait 1/ 40 000 000^{e} de la longueur de la circonférence terrestre mesurée à l'équateur. Un mètre étalon était précieusement conservé au bureau international des poids et mesures près de Paris.

Voici sa définition moderne :

Définition 1 (mètre)**.** Un mètre (symbole : m) est une longueur qui vaut 1 650 763,73 fois la longueur d'onde de la radiation orangée émise par l'isotope 86 du krypton.

(i).2 Le kilogramme C'est la seule unité qui commence par un préfixe (k pour 1000) . C'est aussi la seule unité qui soit encore définie par un objet matériel.

Définition 2 (kilogramme)**.** Le kilogramme est la masse d'un litre d'eau pure à 4^{0}C.

Le kilogramme étalon conservé au bureau international des poids et mesures est comparé à d'autres étalons qui servent alors de référence. D'infimes variations de masse font que de nouvelles définitions sont à l'étude.

(i).3 La seconde La seconde fut d'abord définie comme 1/86400 du jour solaire terrestre moyen.

Sa définition moderne est désormais celle-ci :

Définition 3 (seconde)**.** La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins F=3 et F=4 de l'état fondamental 6S½ de l'atome de césium 133 au repos, à une température de 0 K.

(i).4 L' ampère

Définition 4 (ampère)**.** Un ampère est l'intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables, et distants d'un mètre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs, une force linéaire égale à $2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ (newton par mètre).

(ii) Les autres unités de base du système international D'autres unités ont ajoutées (pour différentes raisons que nous ne développerons pas ici) pour former le système international.

(ii).1 Le kelvin

Définition 5 (kelvin)**.** Le kelvin (symbole : K) est l'unité de température [a]. Un écart de température d'un kelvin correspond à un écart d'un degré celsius (ou centigrade). L'origine de l'échelle kelvin est fixée par le zéro absolu : 0 k correspond donc à - 273,15 ^{0}C.

a. plus exactement de température thermodynamique

Depuis 1954, la conférence internationale des poids et mesures a fixé qu'on ne disait plus "degré kelvin" mais uniquement "kelvin".

(ii).2 la mole

Définition 6 (mole)**.** la mole (symbole : mol) est l'unité SI de quantité de matière. Une mole contient autant d'atomes (ou de molécules) que le nombre d'atomes de carbone compris dans 12 grammes de carbone pur. Ce nombre est de $6,02214040 \cdot 10^{23}$ atomes et est appelé le nombre d' Avogadro.

Nous retiendrons cette définition mais faisons remarquer que ce n'est plus ainsi que la conférence internationale des poids et mesures définit la mole !

(ii).3 Le candela

Définition 7 (candela)**.** La candela[a] (symbole : cd) est l'unité SI d'intensité lumineuse. C'est l'intensité, dans une direction donnée, d'une source lumineuse monochromatique de fréquence $5{,}40 \times 10^{14}$ Hz (càd. une longueur d'onde dans le vide de 555 nm) dont l'intensité énergétique est de 1/683 W par sr (steradian) dans cette direction.

a. ou candéla, un mot latin qui signifie chandelle

La couleur choisie (définie par la fréquence) est proche du vert et correspond à un maximum de sensibilité de l' œil humain.

Un candela équivaut approximativement à l'intensité lumineuse d'un bougie.

(iii) Résumé Résumons ceci sous forme de tableau :

Grandeur nom	symbole	unité nom	symbole
Longueur	l	mètre	m
temps	t	seconde	s
masse	m	kilogramme	kg
intensité de courant	I	ampère	A
température	T (θ)	kelvin	K
quantité de matière	n	mole	mol
intensité lumineuse	I_V	candela	cd

TABLE 1.1 – Les unités de base du SI.

c) Multiples et sous-multiples

Les mesures physiques peuvent énormément varier pour une même grandeur. Ainsi, pour la longueur, la taille d'un atome est approximativement de 1×10^{-10} m, la taille de notre galaxie est, elle, d'approximativement 100 000 années-lumière càd. $9{,}4608 \times 10^{20}$ m. Des préfixes placés devant les unités correspondent à des multiples et sous-multiples de ces unités. Ces multiples et sous-multiples sont toujours des puissances de dix.

Préfixe	Symbole	Facteur
peta	P	10^{15}
téra	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
méga	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
déca	da	10^{1}
-	-	-
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

TABLE 1.2 – Multiples et sous-multiples.

B Les volumes

À l'école primaire nous avons appris à utiliser des "abaques" pour convertir des volumes en litre vers des volumes en m^3. Si ces abaques sont des outils pratiques ils nous font parfois oublier le sens derrière ces opérations.

Rappelons donc la définition d'un litre !

Définition 8 (Litre)**.** Un litre (symbole : L) [a] est le volume équivalent au volume d'un cube de 1 dm de côté.

a. Le symbole "l" est toléré mais déconseillé.

Un litre est donc un volume d'un dm^3. Comme un dm vaut 10 cm, un litre est donc un volume de $1 \times 10^3\,cm^3$ ou $1000\,cm^3$.

De même, comme un mètre vaut 10 dm, un m^3 vaut $1 \times 10^3\,dm^3$ càd 1×10^3 L .

Le volume d'un mL est un 1 cm^3. Par contre, un dL est un dixième de litre et donc 100 cm^3.

2 Les unités dérivées

Toutes les autres unités de la physique peuvent se déduire à partir des unités de base.

A Les unités dérivées comme produit de puissances des unités de base

Nous allons exprimer les unités dérivées comme produits de puissances des unités de base du sytème SI. Nous nous limiterons, pour illustrer notre sujet, au sous système $mk(g)sA$.

càd. :

$$m^w \cdot kg^x \cdot s^y \cdot A^z$$

où $w, x, y, z \in \mathbb{Q}$

La question est de savoir que valent ces w, x, y, z.

a) Notations

À ce stade, il nous faire un peu de formalisme et introduire la notation des unités d'une grandeur.

Le joule est l'unité de l'énergie et va se noter :

$$J = [E]$$

Les crochets droits " [...] " signifient donc "unités de ..."

b) Exemple : le joule

$$J = [E]$$

Toute énergie aura pour unité le joule dans le système "mksA", prenons donc l'énergie cinétique de translation :

$$[E] = [\frac{1}{2} m v^2]$$
$$[E] = [\frac{1}{2}][m][v]^2$$
$$[E] = (\text{nbre. pur : ss. dim})\ \mathrm{kg}\ (\mathrm{m\,s^{-1}})^2$$
$$[E] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$$

B Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle exploite le fait que toute unité soit un produit de puissances des unités de base.

3 Exercices

Les exercices sont communs à ceux du chapitre suivant et se trouvent à la fin de celui-ci.

Chapitre 2

Les erreurs de mesures

Sommaire

Introduction

La précision infinie est impossible. La manière dont nous mesurons une grandeur implique nécessairement une imprécision. Annoncer une mesure sans préciser dans quelle proportion cette mesure est fiable n'est pas acceptable.

Cette position de principe étant cependant intenable car trop lourde dans le cadre d'un cours du secondaire. Elle est donc souvent ignorée. Nous en ferons souvent de même. Mais il faut néanmoins bien garder à l'esprit que l'on fait cet abus !

La publication de résultats scientifiques dans un cadre professionnel s'accompagne *toujours* d'une estimation sur la précision de ces résultats. Ceux-ci seraient considérés comme non fiables si ce n'était pas le cas.

On parle d'imprécision ou d'incertitude sur une mesure ou un calcul.

1 Imprécisions sur les mesures

Mesurez la longueur d'un objet dont la taille est comprise entre deux et neuf cm avec votre équerre ou votre latte puis notez ce résultat en cm . (pour fixer les idées, mesurez la longueur du pouce d'un même élève)

Combien de chiffres après la virgule conservez-vous ?

Allez-vous garder jusqu'à huit chiffres après la virgule ? Ceci correspondrait à la taille d'un atome d'hydrogène. Êtes vous capable de mesurer l'épaisseur d'un atome ?

En pratique, on estime que la mesure à l'aide d'une latte ou d'une équerre munie de graduations au millimètre ne permet pas d'être précis qu'au demi millimètre près !

Vous pouvez donc garder deux chiffres après la virgule mais en noter plus n'aura simplement pas de sens.

A Précision des mesures

Différents facteurs vont affecter la précision de toute mesure. Augmenter la précision et la fiabilité des instruments de mesure est un "job" à temps plein pour certains scientifiques. Les experts en précision des mesures sont appelés des "métrologues". La métrologie est la science de la précision des mesures.

B Erreur aléatoire

Si le même objet est mesuré par un groupe de personne (les différents élèves d'une classe), tous les résultats ne vont pas être identiques ! Ces résultats seront cependant répartis autour d'une valeur moyenne. Des petites erreurs aléatoires (causées par un coup reçu par la table sur laquelle on fait la mesure par exemple ou les dilatations-contractions de la latte dues à des écarts de température) vont faire fluctuer les mesures enregistrées autour de la valeur "vraie". Faire un "grand" nombre de mesures et en faire la moyenne permet donc de s'approcher de cette valeur "vraie".

Dans ce cas,on parle d'erreurs aléatoire.

C Erreur systématique

Nos lattes et équerres sont "calibrées" pour être utilisées au alentour de 20^0C. C'est la "température de confort" à la quelle il y a le plus de chance que nous les utilisions. Imaginons que toutes nos mesures soient faites un jour de grande chaleur à 40^0C. Toutes les lattes et équerres seront dilatées. Si l'objet à mesurer ne subit pas dilatation, nous allons mesurer une longueur qui sera systématiquement trop petite par rapport à la longueur vraie.

Ce type d'erreur ne va pas disparaître en faisant un grand nombre de mesure puis en prenant leur moyenne.

Ce type d'erreur est une erreur systématique.

Il s'agit là d'erreurs où la crédibilité des chercheurs est en jeu. L'annonce faite, il y a quelques années, de la découverte de neutrinos voyageant plus vite que la lumière était due à un glissement de terrain qui avait allongé un câble. Cette erreur a coûté sa place au directeur du projet !

2 Types d'erreurs

L'estimation de l'erreur se fait de deux manières. Comparons les ici.

A Erreur absolue

Si la mesure de longueur citée comme exemple avait donné comme valeur moyenne pour la classe 3,421 cm (càd. 34,21 mm). On aurait noté le résultat comme $34{,}2 \pm 0{,}5$ mm (le 0,01 mm est abandonné comme n'ayant pas de sens puis qu'une puissance de dix sous la précision maximale possible). Nous aurions aussi pu écrire $3{,}42 \pm 0{,}05$ cm.

B Erreur relative

Maintenant, une question : Quelle est l'erreur la plus importante, un demi-mm ou un cm ?

Réponse : ça dépend !

Il faut comparer ce qui est comparable !

Si vous comparez la longueur de dix mètres d'un rectangle peint au sol avec sa largeur de 10 cm et que vous faites l'erreur d'un centimètre sur sa longueur et d'un demi-millimètre sur sa largeur, vous faites une erreur d'un millième sur la longueur et une erreur d'un deux centièmes sur sa largeur. Proportionnellement, vous faites une erreur cinq fois plus grande sur la largeur !

Cette estimation de l'imprécision est appelée l'erreur relative et est souvent indiquée en pourcent.

Dans notre exemple, pour la longueur, on écrirait : $10\,\text{m} \pm 0{,}1\%$.

Pour la largeur cela donnerait $10\,\text{cm} \pm 0{,}5\%$.

La comparaison de la qualité des deux mesures est immédiate.

Dans la mesure de la longueur du pouce, nous obtenons $34{,}2\,\text{mm} \pm 1{,}46\%$.

3 Calcul d'erreur

A Types de grandeurs

Lors de la résolution d'un problème en physique, on va plus loin que "juste" mesurer une ou plusieurs grandeurs. On fait des calculs avec ces grandeurs : on les additionne, soustrait, multiplie, divise entre elles après les avoir mis à des puissances diverses etc.

Comment, dès lors, estimer la précision du résultat final ? Il ne s'agit seulement de "bien faire" les opérations mathématiques pour arriver au "bon" résultat !

Ceci implique donc qu'il y ait deux types de grandeurs :

— les grandeurs directes (ou premières) qui sont le résultat d'une mesure directe,

— les grandeurs composées qui sont le résultat d'une combinaison par calcul de plusieurs grandeurs directes (Une surface comme le produit de deux longueurs par exemple) .

B Exemple : erreur sur une surface

Si nous voulions maintenant mesurer la surface du rectangle peint au sol au point précédent pour estimer la quantité de peinture nécessaire. L'imprécision sur la mesure va nous donner une estimation de la marge de peinture supplémentaire qu'il faut prévoir pour être sur de ne pas "tomber trop juste".

La surface va être (10 m ± 0,1%) × (10 cm ± 0,5%).

Il est immédiat de constater que notre rectangle a une surface de 1 m^2.

Mais avec quelle incertitude ?

La pratique est d'additionner les deux erreurs relatives : L'imprécision sur la surface est donc de 0,6% càd. ici de 60 cm^2.

C Règles de calcul d'erreur

Voici les règles élémentaires de calcul d'erreur entre deux grandeurs ("a" et "b") dont les erreurs absolues ("Δa" et "Δb") sont connues. Nommons x le résultat de l'opération mathématique entre a et b, Δx l'erreur absolue sur cette dernière grandeur et $\Delta x/x$ l'erreur relative correspondante.

Opération	x	Δx	$\Delta x/x$
addition	$a+b$	$\Delta a+\Delta b$	$(\Delta a+\Delta b)/(a+b)$
soustraction	$a-b$	$\Delta a+\Delta b$	$(\Delta a+\Delta b)/(a-b)$
multiplication	$a\times b$	$b\Delta a+a\Delta b$	$(\Delta a/a)+(\Delta b/b)$
division	a/b	$(b\Delta a+a\Delta b)/b^2$	$(\Delta a/a)+(\Delta b/b)$
puissance	a^n	$na^{n-1}\Delta a$	$n\Delta a/a$

TABLE 2.1 – Erreurs absolues et relatives de grandeurs composées.

Pour les sommes et différences, Δx est donc la somme des Δ absolus. Pour les produits et quotients, $\Delta x/x$ est donc la somme des Δ relatifs.

4 La notation scientifique et les chiffres significatifs

Nous l'en avons remarqué, noter une infinité de chiffres pour un résultat de mesure n'a pas de sens. Où s'arrêter ? Comment noter ces résultats ? Nous allons en discuter ici.

A Les chiffres significatifs

Imaginons une mesure dont le résultat est 0,000 327 5 m. Le zéro à gauche de la virgule et ceux à sa droite nous renseignent sur "l'ordre de grandeur" de la mesure (ici, l'objet mesuré est de l'ordre du dixième de millimètre).

C'est le premier chiffre différent de zéro (ici le 3) qui nous permet d'affirmer ceci. On dit que c'est le *premier* chiffre significatif. Les zéros ne sont *pas* des chiffes significatifs.

"327 et 5" sont les chiffres significatifs.

Le dernier "5" est *le* (seul et unique) chiffre incertain (mais il est *aussi* significatif). Le chiffre incertain correspond à l'incertitude sur la mesure.

B La notation scientifique

Il est important, en science, de noter ses résultats en notation scientifique. Les intérêts de cette notation sont de permettre de comparer rapidement diverses mesures, de connaître directement leur ordre de grandeur et de savoir quelle est la précision de ces mesures.

La notation avec des puissances de dix se justifie d'autant plus si on considère, par exemple, des échelles de distance. Ainsi, la taille de notre galaxie est d'approximativement 100 000 années-lumière càd. $9{,}4608 \times 10^{20}$ m. D'un autre côté, si on regarde du côté de l'infiniment petit, la taille d'un noyau est de l'ordre de 1×10^{-14} m. C'est plus facile (et plus clair) que d'écrire : 0,000 000 000 000 01 m

L'expression d'une quantité en notation scientifique répond aux règles suivantes :

1. On écrit le premier chiffre compris entre 1 et 9,
2. puis, éventuellement des chiffres après la virgule.
   (Le nombre *total*[1] de chiffres est appelé le nombre de chiffres significatifs.)
3. Cette première partie est multipliée par une puissance de dix.

— La première partie est appelée la *mantisse* ;
— la puissance de dix dans la deuxième partie est l'exposant.

5 Exercices

1. Convertir dans les unités indiquées et écrire en notation scientifique :
   (a) 5,08 mm = ? µm
   $5{,}08\,\text{mm} = 5{,}08 \times 10^{3}\,\mu\text{m} = 5080\,\mu\text{m}$

m	dm	cm	mm			µm
			5	0	8	0

   (b) 0,543 mg = ? g
   $0{,}543\,\text{mg} = 5{,}43 \times 10^{-1}\,\text{mg} = 10^{-1} \times 5{,}43 \times 10^{-3}\,\text{g} = 5{,}43 \times 10^{-4}\,\text{g}$

g	dg	cg	mg			µg
0	0	0	0	5	4	3

   (c) $5{,}098 \times 10^{-4}\,\text{s} = ?\,\mu\text{s}$
   $5{,}098 \times 10^{-4}\,\text{s} = 10^{-4} \times 5{,}098 \times 10^{6}\,\mu\text{s} = 5{,}098 \times 10^{2}\,\mu\text{s}$

   (d) 9913 ng = ? mg
   $9913\,\text{ng} = 9{,}913 \times 10^{3}\,\text{ng} = 10^{3} \times 9{,}913 \times 10^{-9}\,\text{g} = 10^{-6} \times 9{,}913 \times 10^{3}\,\text{mg} = 9{,}913 \times 10^{-3}\,\text{mg}$

   (e) 0,58 km = ? cm
   $5{,}8 \times 10^{4}$ cm

   (f) 54×10^{-20} Ms = ? ms
   $5{,}4 \times 10^{-10}$ ms

   (g) $3656{,}3\,\text{cm}^3 = ?$ hL
   $3656{,}3\,\text{cm}^3 = 3{,}6563 \times 10^{3}\,\text{cm}^3 = 10^{3} \times 3{,}6563 \times 10^{-3}\,\text{dm}^3 = 3{,}6563\,\text{dm}^3 = 3{,}6563\,\text{L} = 3{,}6563 \times 10^{-2}\,\text{hL}$

   (h) 3,69 m = ? L
   $3{,}69 \times 10^{3}$ L

2. Voici différentes longueurs, en *respectant cet ordre*,
   — les écrire en notation scientifique,
   — les convertir en mètres.
   — (Attention aux chiffres significatifs !)

1. càd. avant et après la virgule

(a) 107,30 km
$1{,}0730 \times 10^{5}$ m

(b) 2741,94 cm
$2{,}741\,94 \times 10^{10}$ m

(c) 0,000 000 001 µm
1×10^{-15} m

(d) 0,12 km
$1{,}2 \times 10^{2}$ m

(e) 0,4000 mm
$4{,}000 \times 10^{-4}$ m

(f) 3,1415 pm
$3{,}1415 \times 10^{-12}$ m

(g) 10 000 000 m
1×10^{7} m

(h) 0,000 025 4 Mm
$2{,}54 \times 10^{1}$ m

(i) 32,01 µm
$3{,}201 \times 10^{-5}$ m

(j) 680 nm
$6{,}80 \times 10^{-7}$ m

(k) 1325 dm
$1{,}325 \times 10^{2}$ m

(l) 50,03 hm
$5{,}003 \times 10^{3}$ m

3. Pour chacune des grandeurs des exercices précédents, calculer :
   (a) l'erreur absolue,
   (b) l'erreur relative.
4. Effectuez les calculs suivants. À chaque fois, calculez :
   — l'erreur absolue,
   — l'erreur relative.

   (a) 50,03 hm + 1325 dm
   (b) 50,03 hm × 1325 dm
   (c) $\frac{32{,}01\,\mu\text{m}}{680\,\text{nm}}$

Deuxième partie

Cinématique

Chapitre 3

Positions, trajectoires et systèmes de référence

Sommaire

Introduction

Nous traiterons ici de généralités. Il va s'agir de définir quelques concepts de base concernant l' étude du mouvement

Tous les jours nous sommes en mouvement. Nous marchons, courrons, nageons, sautons, grimpons descendons, tournons... Ces mouvements si naturels, nous allons les analyser au "filtre" de la physique. Les mots de tous les jours vont prendre un sens plus précis, parfois en contradiction avec le sens courant.

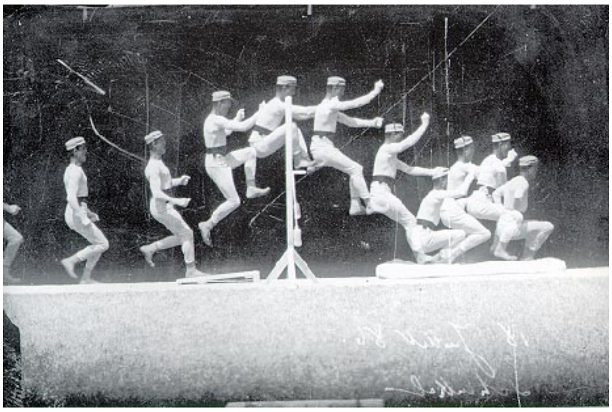


FIGURE 3.1 – Un saut.

Ces concepts sont ceux qui sont utilisés pour analyser les mouvements des sportifs, pour expliquer le comportement d'une machine, mais aussi dans les jeux vidéos. Si le graphisme des jeux vidéos n'obéit pas à ces lois, les mouvements n'ont pas l'air naturels. De nombreux physiciens travaillent d'ailleurs dans le monde de l'informatique et du jeu vidéo.

Nous allons suivre aussi une logique de simplification.

1 Le mobile ponctuel

La démarche de la physique consiste, entre autre, à "aller à l'essentiel" pour étudier une situation. Les physiciens vont ainsi réduire l'étude du mouvement d'un corps à l'étude du mouvement d'un point. Nous nous limiterons donc à l' étude du mouvement du centre de masse (ou de gravité) du corps considéré.

Nous appellerons ce point le mobile ponctuel. On dit aussi "le point matériel".

C'est à partir de cette idéalisation de la réalité que nous pourrons étudier des situations plus complexes. Ainsi, pour étudier le mouvement d'un cylindre roulant sur un plan incliné, nous étudierons d'abord le mouvement de son centre de masse, réduisant ainsi l'étude du mouvement à celui d'une translation parallèle à la surface du plan incliné. Pour étudier le mouvement de rotation, nous étudierons le mouvement de certains points privilégiés du cylindre mais, à nouveau, en nous limitant à certains points.

Cette démarche est utilisée pour analyser les mouvements des sportifs.

FIGURE 3.2 – Seuls les mouvements de quelques points sont analysés.

Plutôt que d' étudier tout un corps en mouvement, nous allons nous concentrer sur les mouvements des points de ce corps.

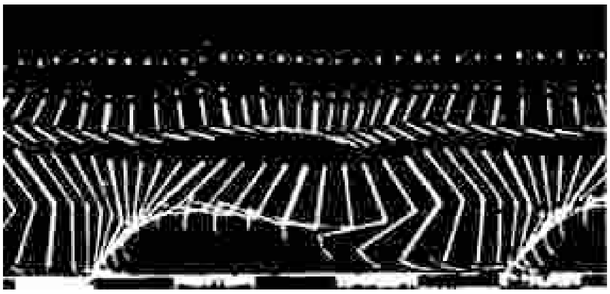


FIGURE 3.3 – Les différentes positions de quelques points.

2 Le temps

Les temps se mesurent en secondes.

A Date et instant

Définition 9 (instant)**.** Un instant est une date. C'est un temps infiniment court.

Si on trace la droite du temps, c'est un point sur cette droite.

Nous traiterons une date comme un "point de repère", une sorte de "panneau" ou de "drapeau" "accroché" à un événement et permettant de l'identifier.

B Durée

Définition 10 (durée)**.** Une durée est la différence entre une date ultérieure et une date antérieure .

3 Positions, trajectoires

A Repos et mouvement

Les notions de repos et de mouvement dépendent du point de vue adopté. On parle de "relativité du mouvement".

Pour nous en convaincre, imaginons une situation qui vous est peut être familière : Des amis se séparent dans une station de métro. Certains (groupe Albert) restent sur le quai ; d'autres (groupe Bertrand) montent dans une rame ; un troisième groupe (groupe Caroline) embarque dans la rame allant en sens inverse.

La rame A démarre et pourtant les passagers du groupe B ont une sensation de nausée en croyant que c'est leur rame qui démarre.

Étudions la question de "qui est en mouvement", "qui est au repos" selon le point de vue des différents groupes.

Résumons cette situation sous forme de tableau :

observateur \ mobile	A	B	C
A	r	m	m
B	m	r	r
C	m	r	r

TABLE 3.1 – Repos et mouvement selon l'observateur.

La notion de repos ou de mouvement n'a du sens que si on précise l'observateur : la personne ou l'objet qui va servir de référence.

B Positions

Définition 11 (position)**.** La position d'un mobile est le lieu où se trouve le mobile ponctuel à un instant donné.

C Trajectoires

Définition 12 (trajectoire)**.** Une trajectoire c'est l'ensemble de positions occupées par un mobile.

C'est une courbe continue.

Relativité

La trajectoire dépend du système de référence choisi.

Exemple : bateau ou clown

4 Les systèmes de référence

Pour indiquer des positions, on a besoin d'un système de référence.

Un système de référence a toujours une origine. Ensuite un certain nombre de valeurs permette de déterminer de manière *univoque* l'emplacement d'un objet dans ce système.

Le système choisi va dépendre de la situation étudiée. Il faut se poser des questions : Sommes-nous à une, deux ou trois dimensions ? La situation présente t' elle des symétries particulières ?

A Cartésiens

Les systèmes les plus connus sont les systèmes cartésiens [1] ou orthonormés.

a) À une dimension

La droite réelle graduée fournit un repère pour les situations se déroulant sur une seule droite.

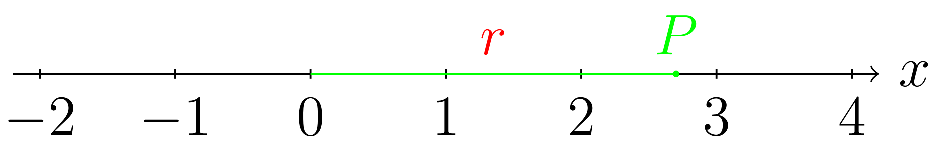


FIGURE 3.4 – Un axe à une dimension : l'emplacement du point "P" est donné par le réel "r".

1. Le terme cartésien vient de leur inventeur le français René Descartes.

b) À deux dimensions

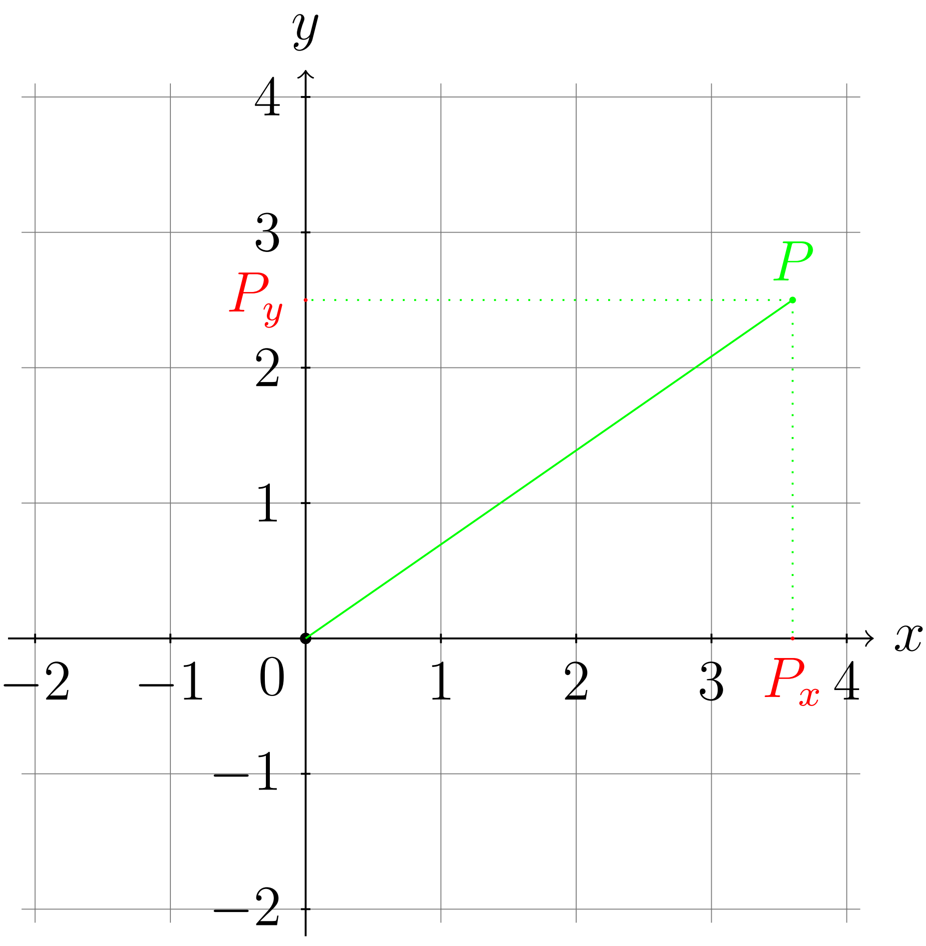


FIGURE 3.5 – Un système cartésien à deux dimensions : l'emplacement du point "P" est donné par les réels "P_x" et "P_y".

c) À trois dimensions

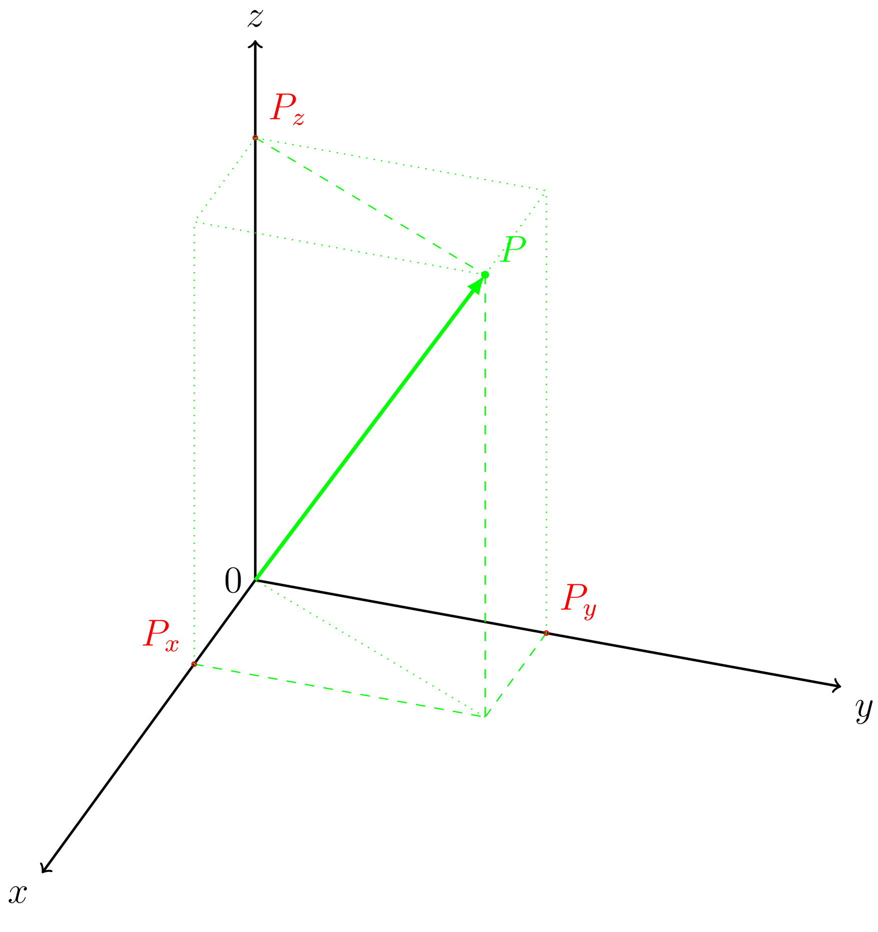


FIGURE 3.6 – Un système cartésien à trois dimensions : l'emplacement du point "P" est donné par les réels "P_x", "P_y" et "P_z".

B Polaires, cylindriques et sphériques

a) Polaires

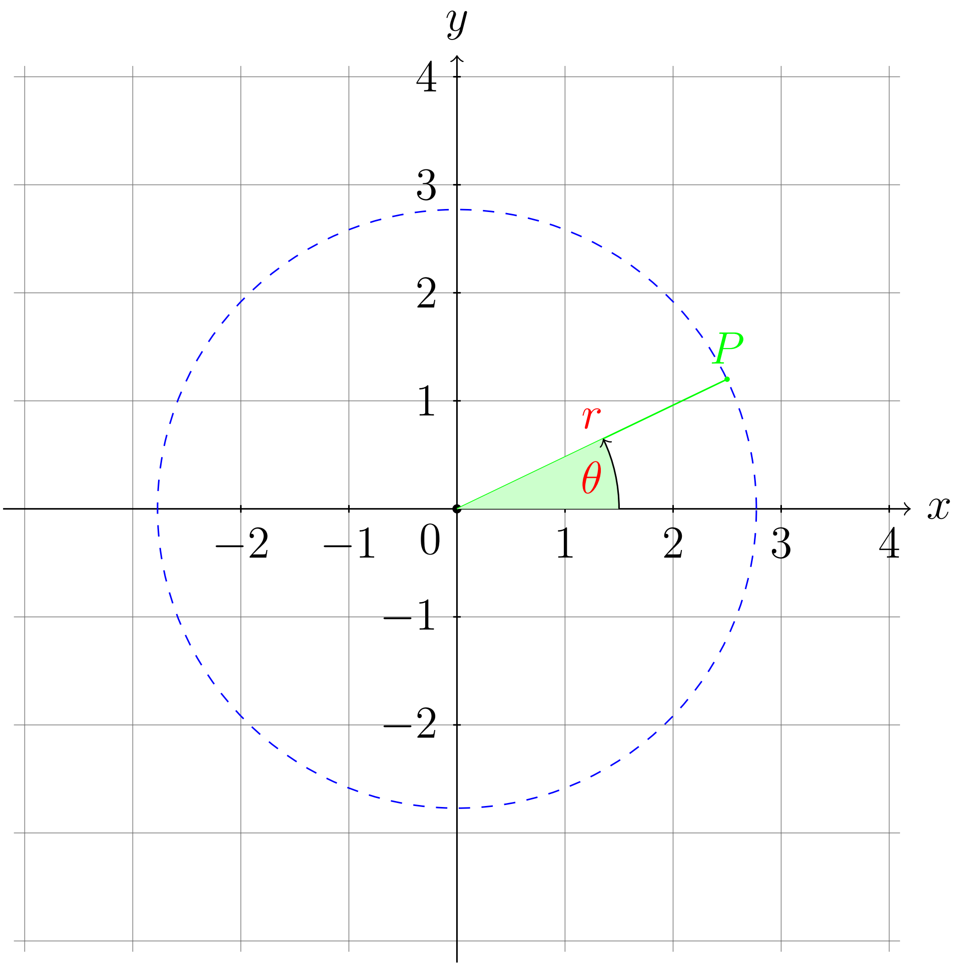


FIGURE 3.7 – Un système polaire à deux dimensions : l'emplacement du point "P" est donné par les réels "r" et "θ".

b) Cylindriques

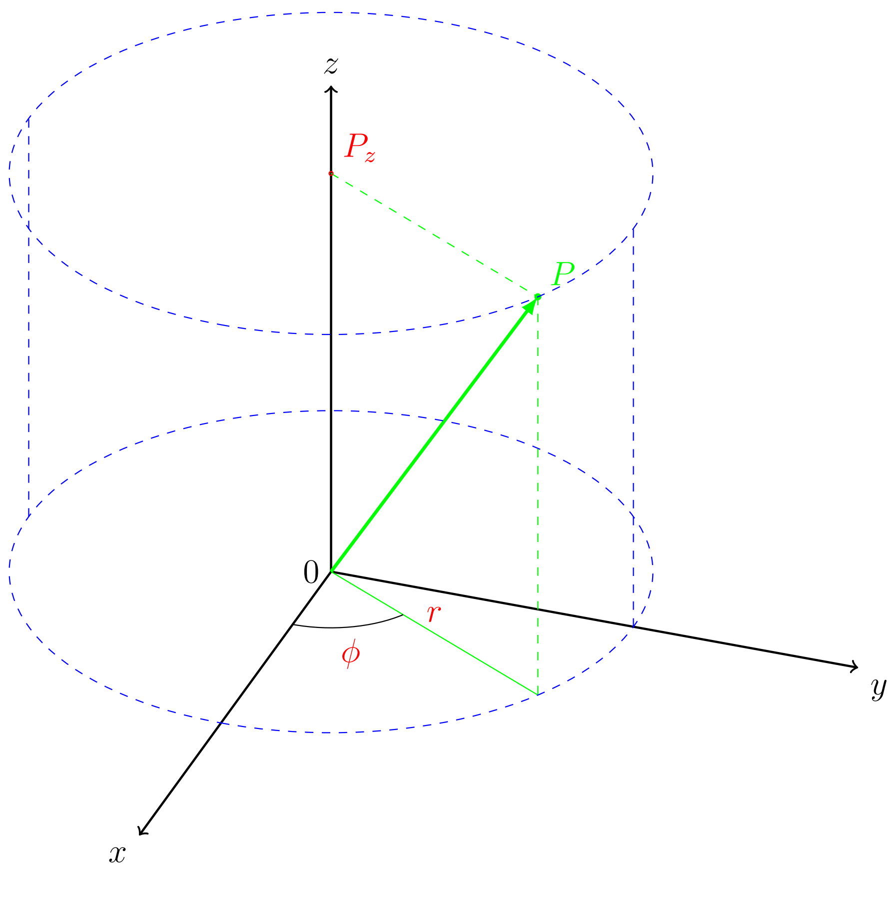


FIGURE 3.8 – Un système de référence en coordonnées cylindriques : l'emplacement du point "P" est donné par les réels "r", "P_z" et "Φ".

c) Sphériques

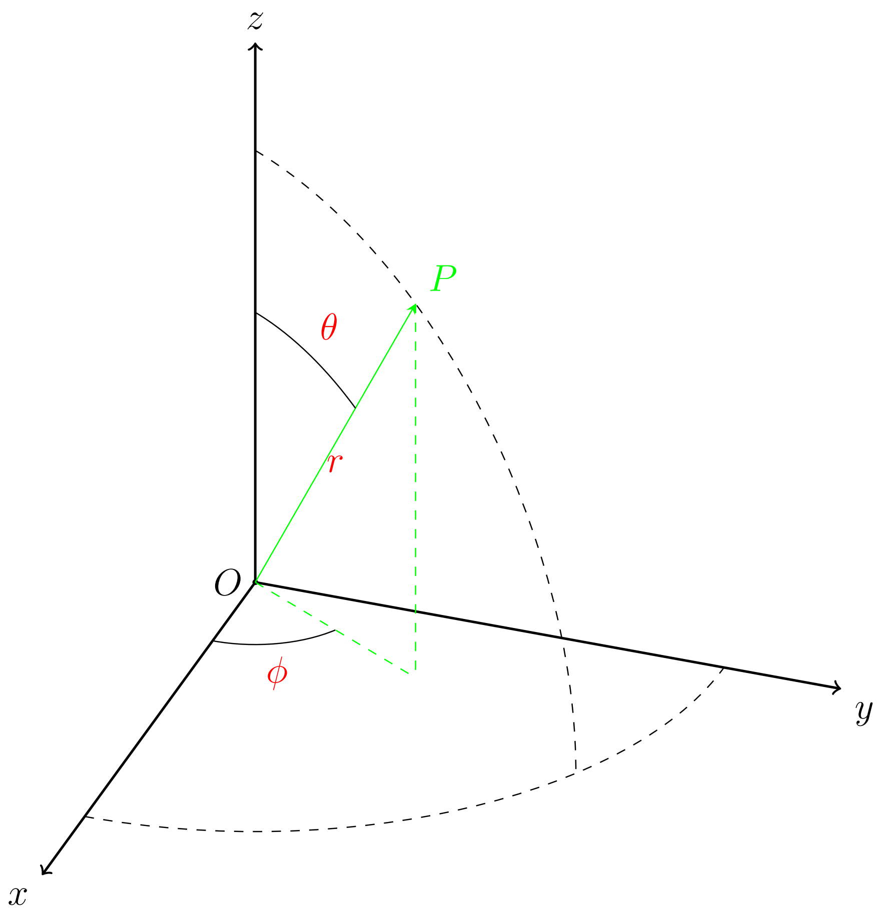


FIGURE 3.9 – Un système de référence en coordonnées sphériques : l'emplacement du point "P" est donné par les réels "r", "Φ" et "θ".

C Différentes coordonnées sphériques

Pour des questions de cohérence interne dans chacune de leur branche, les physiciens, mathématiciens et géographes n'emploient pas exactement les mêmes systèmes de coordonnées sphériques.

a) Physiciens

Les conventions des physiciens sont celles utilisées pour la figure 3.9 p. 26.
La distance "r" entre l'origine et le point "P" est souvent notée "ρ".

b) Mathématiciens

Dans la convention des mathématiciens, les angles "θ" et "Φ" sont inversés par rapport aux conventions des physiciens.

c) Géographes

Dans la convention des géographes, l'angle entre la demi-droite reliant l'origine au point "P" et l'axe vertical est remplacé par l'angle entre la demi-droite reliant l'origine au point "P" et le plan "xy". Cet angle vaut donc O^0 à l'équateur et respectivement 90^0 et -90^0 aux pôles. C'est la latitude.

d) Astronomes

Les astronomes emploient deux systèmes de coordonnées sphériques obéissant aux mêmes conventions que les géographes.

— Le premier système est appelé alt-azimutal et repére les astres du point de vue local de l'observateur.
— l'autre système est appelé "dec-ra" pour déclinaison et ascension droite ("right ascension" en anglais) et est plus "global".

D Vecteurs unités

Lorsqu'on utilise une base dans un système de référence quel qu'il soit, il est souvent nécessaire de décomposer le vecteur "$\overrightarrow{OP}$" issu de l'origine et allant au point "P". Les composantes vont être des multiples de vecteurs unités caractéristiques de la base choisie.

a) Cartesiens

Dans les repères cartésiens, nous choisirons de noter ces vecteurs unités : "$\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ et $\vec{1}_z$".

Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ va donc être décomposé en trois vecteurs : $\overrightarrow{OP_x}$, $\overrightarrow{OP_y}$ et $\overrightarrow{OP_z}$.

Si nous considérons que chacun de ces vecteurs est un multiple des vecteurs unités correspondant, nous pourrons donc écrire :

Propriété 1 (Décomposition en vecteurs unités)**.**

$$\overrightarrow{OP} = P_x\vec{1}_x + P_y\vec{1}_y + P_z\vec{1}_z \tag{3.1}$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ et $\vec{1}_z$.

D'autres conventions existent pour représenter ces vecteurs unités : " $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$" ou encore " $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$". Elles sont équivalentes.

b) $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\theta$

Nous étudierons des mouvement circulaires où la base choisie correspondra à un système de coordonnées polaires.

Là aussi des vecteurs unités seront utiles : un vecteur unité $\vec{1}_r$ selon le rayon "r" et un un vecteur unité $\vec{1}_\theta$ perpendiculaire au rayon et donc tangent à la circonférence.

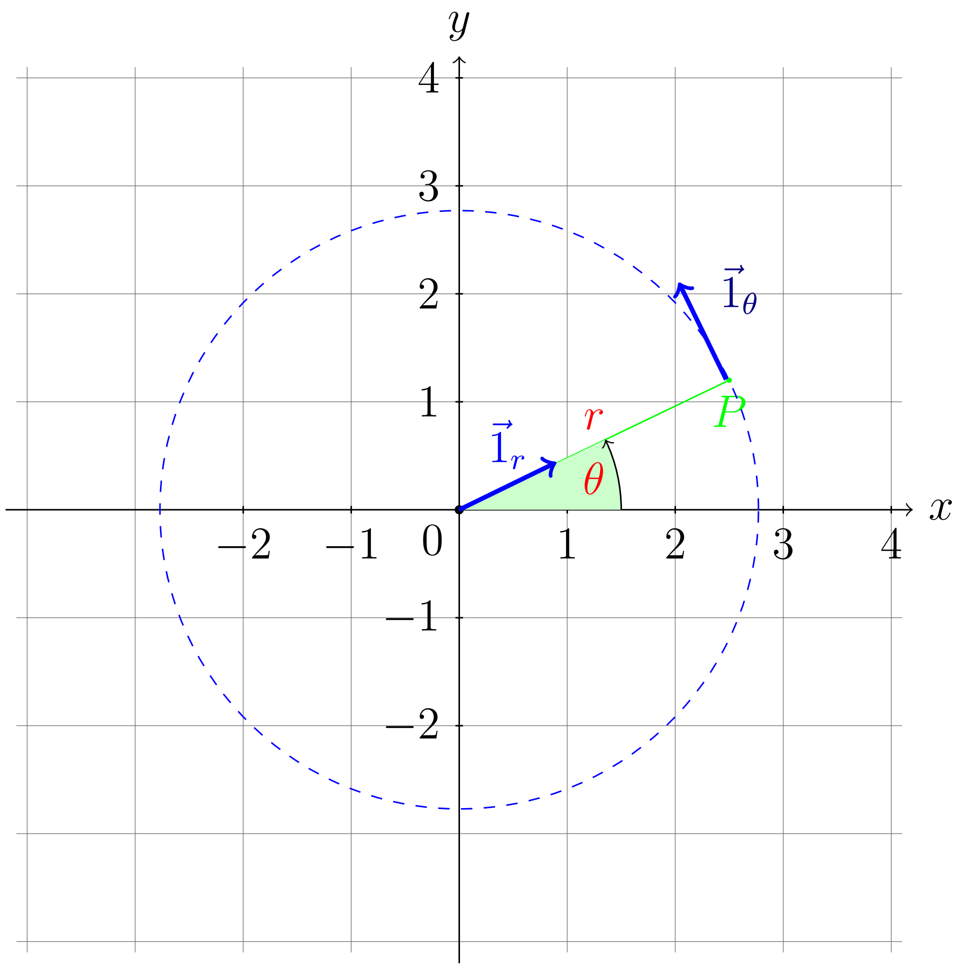


FIGURE 3.10 – Vecteurs unités dans système de référence en coordonnées polaires.

Ces vecteurs peuvent être ramenés à l'origine.

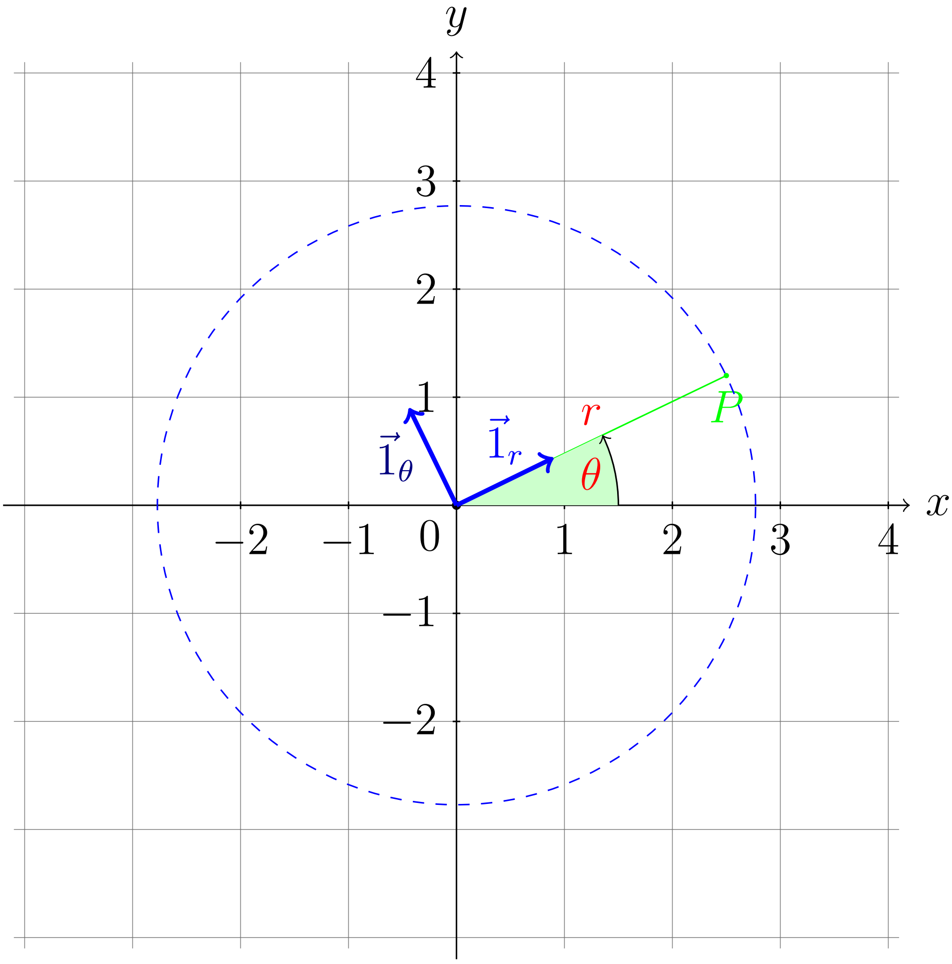


FIGURE 3.11 – Vecteurs unités ramenés à l'origine dans système de référence en coordonnées polaires.

Il peuvent aussi être placés au point "P".

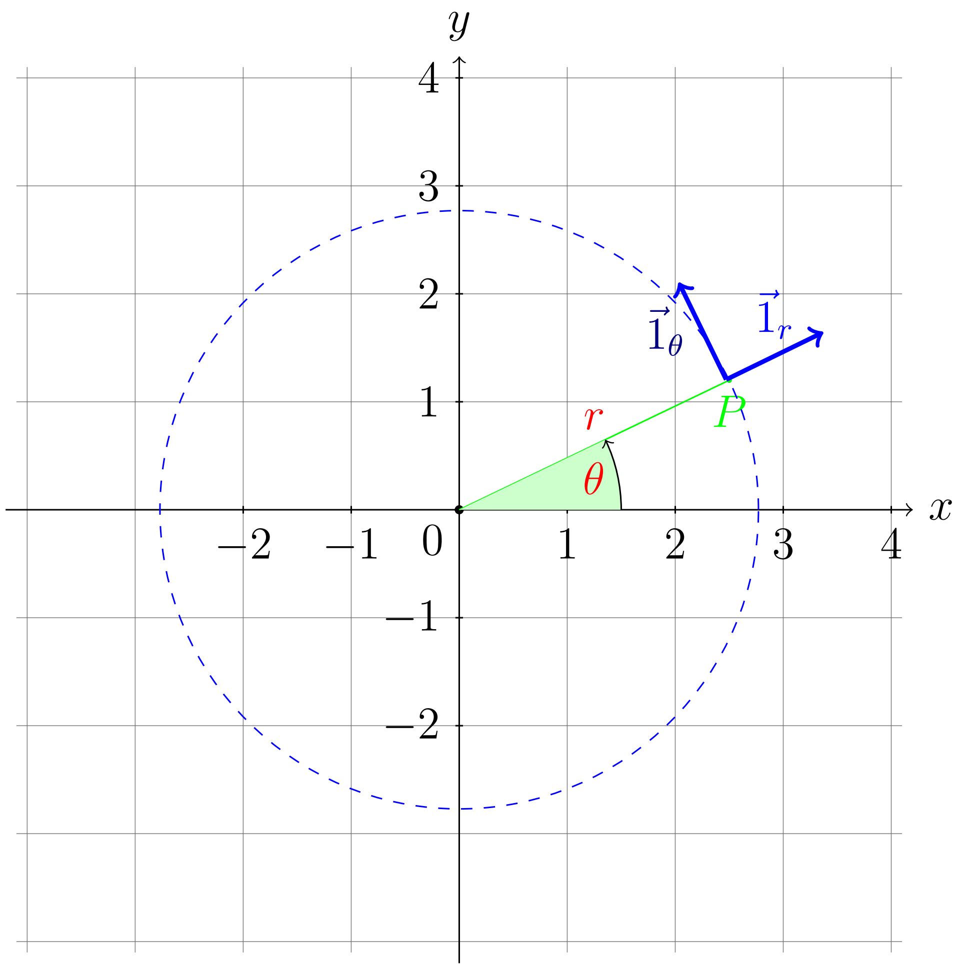


FIGURE 3.12 – Vecteurs unités au point P dans système de référence en coordonnées polaires.

E Degrés de libertés

Les degrés de liberté appartiennent à une classe d'objet qu'on appelle des coordonnées généralisées.

Imaginons une coccinelle marchant régulièrement le long d'un ressort. Certes le mouvement est dans l'espace mais pourtant on n'a pas besoin de trois paramètres pour préciser l'emplacement de l'insecte, un seul suffit. Ainsi, trois équations avec un seul paramètre (par exemple le temps ou la "longueur" de ressort parcourue) définiront la position du coléoptère.

La "hauteur" de la coccinelle le long du ressort donnera aussi la position de la coccinelle en "x" et en "y".

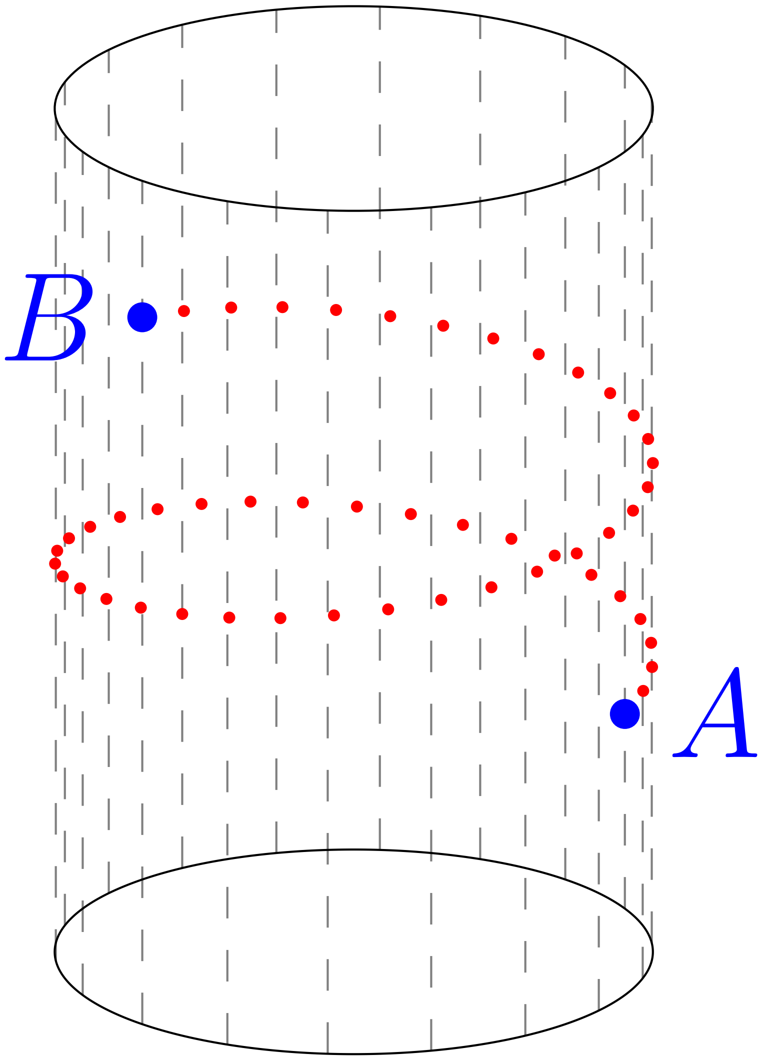


FIGURE 3.13 – Le mouvement d'une coccinelle sur un ressort.

Dans ce type de mouvement, on parle de degré de liberté. Dans l'exemple de la coccinelle, bien que nous soyons à trois dimensions, un seul paramètre suffit pour déterminer la position : nous dirons que le mouvement est à *un* degré de liberté.

La longueur parcourue le long du ressort depuis une origine est une *coordonnée curviligne*.

F Changement de système

Il est parfois important de connaître les coordonnées d'un point dans plusieurs systèmes (un cartésien et un polaire par exemple). Des techniques existent pour passer de l'un à l'autre.

a) Jacobien

Le changement de coordonnées pour passer d'un système à l'autre se fait via des matrices. Une matrice qui permet de faire ce changement est appelée un *jacobien*.

5 Exercices

Chapitre 4

Déplacements et vitesses

Sommaire

Introduction

Nous allons ici formaliser une série de notions. Ainsi, les positions vont être renseignées par des vecteurs. La définition de vitesse va sembler devenir presque contre-intuitive pour pouvoir se préciser. Le concept de déplacement va établir le lien entre ces nouvelles définitions. Nous réaliserons ainsi une première approche du calcul différentiel en physique.

1 Vecteurs positions et déplacements

A Vecteur position

Nous savons qu'il y a correspondance entre les coordonnées d'un point et les composantes d'un vecteur issu de l'origine et se terminant en ce point.

a) Définition

Désormais nous utiliserons le vecteur position pour définir l'emplacement d'un mobile.

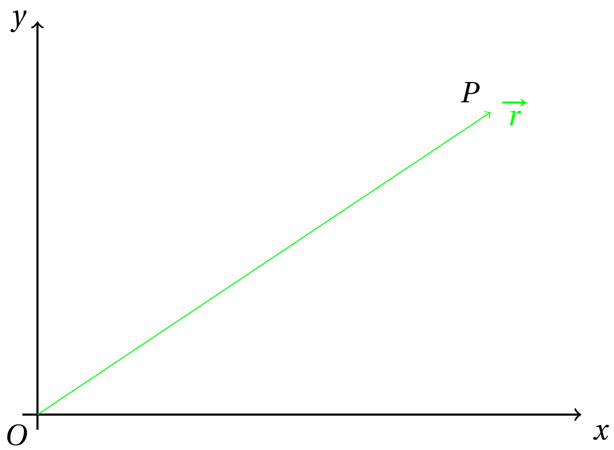


FIGURE 4.1 – Le vecteur position.

Définition 13 (vecteur position)**.** Le vecteur position $\overrightarrow{r}$ est la grandeur vectorielle $\overrightarrow{OP}$ caractérisant la position du mobile M par rapport à l'origine du système de référence.

b) Relativité

Il est bien clair que le choix d'un autre repère avec une autre origine va changer le vecteur position "repérant" le mobile M.

B Vecteur déplacement

a) Justification

Observons deux positions consécutives d'un mobile.

Schéma 1.

Le vecteur position du mobile M est donc : $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$

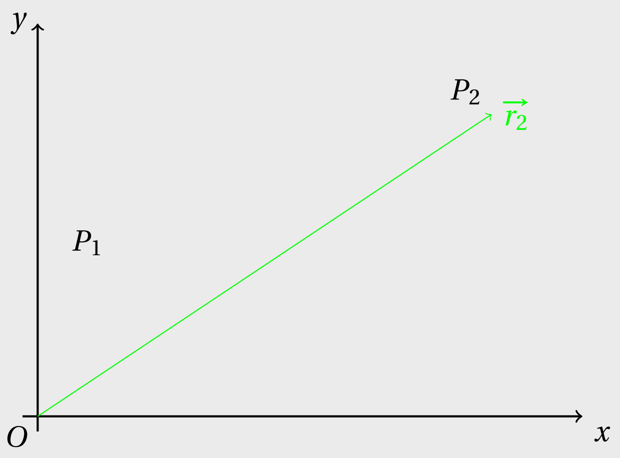


Schéma 2.

Le vecteur position du mobile M est devenu : $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$

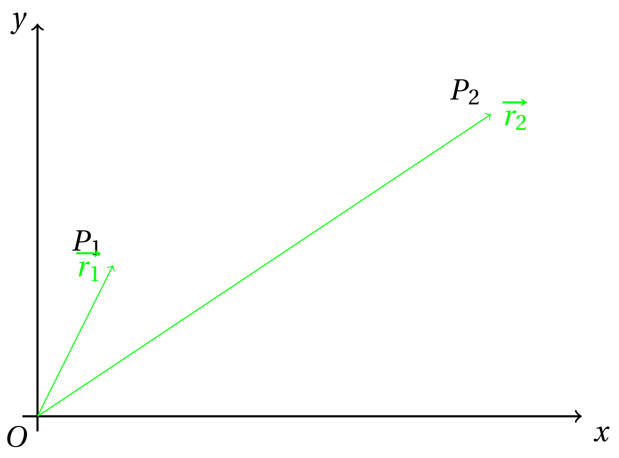


FIGURE 4.2 – Le vecteur position en t_1 et t_2.

Le vecteur position du mobile M est passé de $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ à $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$

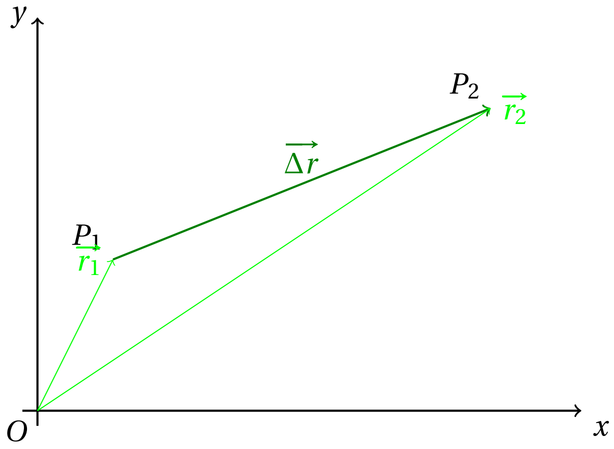


FIGURE 4.3 – Le vecteur déplacement entre t_1 et t_2.

Donc, si le déplacement se fait de P_1 à P_2, nous pouvons écrire que le vecteur déplacement est égal à $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Réécrivons maintenant ce déplacement en terme de $\vec{r_1}$ et de $\vec{r_2}$:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{0P_2} = \overrightarrow{0P_2} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$

b) Définition

Si nous décidons de noter la différence $\vec{r_2} - \vec{r_1}$ comme $\overrightarrow{\Delta r}$, la définition suivante vient naturellement :

Définition 14 (vecteur déplacement)**.** Le vecteur déplacement $\overrightarrow{\Delta r}$ est la grandeur vectorielle $\overrightarrow{P_1P_2}$ caractérisant la variation de position du mobile M de P_1 vers P_2.

c) Relativité

Ici, par contre, le choix d'un autre repère avec une autre origine, pour autant que cette dernière soit immobile par rapport à la première, ne va pas changer le vecteur déplacement du mobile M.

2 Vitesses

A Histoire du concept de vitesse

C'est au jésuite Pierre Varignon (1654 - 1722) que nous devons l'invention du concept "moderne" de vitesse. Avant lui, on comparait entre eux des rapports de grandeurs différentes mais on ne faisait jamais de rapport de grandeurs n'ayant pas les même unités.

Ainsi Galilée compare des rapports de distances parcourues et des temps nécessaires pour les parcourir : $\frac{d_1}{d_2} = \frac{t_1}{t_2}$. Mais il ne compare pas les vitesses au sens moderne : $\frac{d_1}{t_1} = \frac{d_2}{t_2}$

B Le vecteur vitesse moyenne

a) Définition

Définition 15 (vecteur vitesse moyenne)**.** Le vecteur vitesse moyenne $\overrightarrow{v_{moy}}$ d'un mobile est le rapport entre le vecteur déplacement $\overrightarrow{\Delta r}$ et la durée Δt nécessaire pour accomplir ce déplacement.

$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \tag{4.1}$$

où
— $\overrightarrow{v_{moy}}$ est le vecteur vitesse moyenne (Unité SI : $\mathrm{m\,s^{-1}}$) ;
— $\overrightarrow{\Delta r}$ est le vecteur déplacement (Unité SI : m) ;
— $\Delta t = t_f - t_i$ est la durée nécessaire pour effectuer le déplacement (Unité SI : s) ;
— t_f et t_i sont les dates, respectivement finale et initiale, du déplacement considéré (Unité SI : s) .

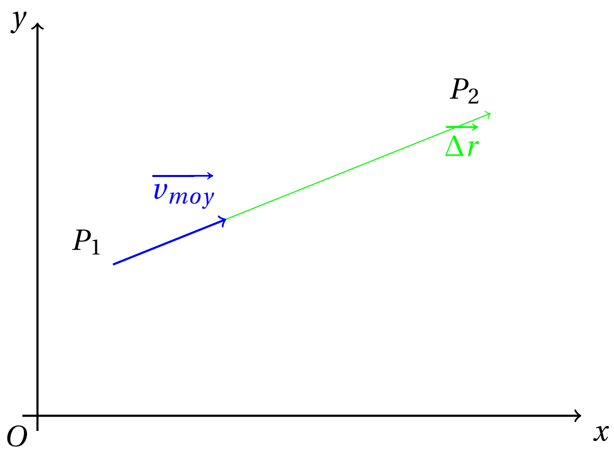


FIGURE 4.4 – Le vecteur vitesse moyenne et le vecteur déplacement.

Le vecteur vitesse moyenne est :
— de même direction que le vecteur déplacement,
— de même sens que le vecteur déplacement,
— de norme égale à $v_{moy} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ [1]

Justifions ce point :

Les propriétés des vecteurs nous apprennent que : $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AB // CD$

Et comme, $\overrightarrow{v_{\mathrm{moy}}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{\Delta r}$ avec $\Delta t \in \mathbb{R}$. alors $\overrightarrow{v_{\mathrm{moy}}} // \overrightarrow{\Delta r}$

De même, si $k > 0$ les deux vecteurs sont de même sens. Ici $\Delta t > 0$ et donc $\overrightarrow{v_{\mathrm{moy}}}$ et $\overrightarrow{\Delta r}$ sont de même sens.

b) Du $\mathrm{km\,h^{-1}}$ au $\mathrm{m\,s^{-1}}$

En physique, il faut toujours, sauf dans des cas triviaux, utiliser les vitesses en $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Dans la vie courante, cependant, les vitesses sont souvent renseignées en $\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Il est facile de passer d'une unité à l'autre si on se souvient que :
— $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$,

1. Par convention, lorsque nous faisons référence à un vecteur sans mettre de "flèche", c'est que nous ne considérons que sa norme.

— $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$.

Il en découle que :

Propriété 2 (Du $\mathrm{km\,h^{-1}}$ au $\mathrm{m\,s^{-1}}$)**.**

$$1\,\mathrm{km\,h^{-1}} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{1}{3,6}\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{4.2}$$

(i) Exemples Une vitesse de $72\,\mathrm{km\,h^{-1}} = \frac{72}{3,6}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

c) Ordres de grandeur

vitesse / mobile	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	$\simeq \mathrm{km\,h^{-1}}$
escargot	0,001	0,004
Marche (homme)	1	4
Course (100 m)	10	40
Guépard	30	120
TGV	100	360
Avion (ligne)	220	800
Son (air sec à 20 °C)	340	1020
Avion (supersonique)	400	1400

TABLE 4.1 – Vitesses de différents mobiles.

d) La vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses

Remarquons de suite, qu'en général, la vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses.

(i) Exemple Prenons un cas extrême, effectuons un tour complet sur un circuit de grand prix à une vitesse constante de $200\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Le vecteur déplacement est *nul* !

Selon notre définition, la vitesse moyenne est donc elle aussi nulle !

e) Limitations de la vitesse moyenne

La vitesse moyenne telle que nous venons de la définir permet de répondre à certaines questions mais connaît aussi des limitations. Faisons une rapide revue de celles-ci.

(i) Vitesses variables en grandeur Imaginons, pour simplifier les choses, un mouvement rectiligne. qui nous dit que ce mouvement se fait à vitesse constante ? On eut très bien pu se faire "flasher" sur l'autoroute à plus de 120 km/h alors que notre vitesse moyenne était de 90 km/h !

(ii) Vitesses variables en sens Qui nous dit que ces vitesses sont toutes de même sens ? Même sur un mouvement rectiligne, nous pouvons faire des allers retours !

(iii) Vitesses variables en direction Imaginons maintenant un mouvement dans l'espace. Le vecteur vitesse moyenne pointe dans une direction qui n'est pas nécessairement la direction du mouvement au départ.

(iv) Cas général Nous pouvons même imaginer une combinaison de toutes ces situations.

(v) Conclusion Il est donc clair que la vitesse moyenne n'est pas adaptée pour caractériser la vitesse du mobile dans toutes les situations possibles à tout instant.

C Vecteur vitesse instantanée

Pour répondre aux problèmes soulevés au point précédent, nous allons étudier la vitesse à chaque instant [2] du parcours. Nous étudierons donc la vitesse instantanée !

a) Une solution aux limitations de la vitesse moyenne

Construisons la trajectoire d'un mobile M dans le plan xy et considérons un point de départ P et un point d'arrivée Q. Considérons aussi quelques points intermédiaires sur cette trajectoire et nommons les de P_1 (=P) à P_5 (=Q). Traçons le vecteur déplacement entre ces points puis le vecteur vitesse moyenne associé : $\overrightarrow{v_{1;5}}$ ou vecteur vitesse entre P_1 et P_5.

Comme précédemment, le vecteur vitesse moyenne $\overrightarrow{v_{1;5}}$ ne pointe pas dans la direction de la trajectoire ce qui n'est pas satisfaisant.

Prenons une durée Δt un peu plus courte et étudions le mouvement entre P_1 et P_4. Il y a une légère amélioration : $\overrightarrow{v_{1;4}}$ se "rapproche" de la trajectoire.

Considérons donc une durée Δt encore un peu plus courte et étudions le mouvement entre P_1 et P_3. Il y a une amélioration de $\overrightarrow{v_{1;3}}$ mais ce n'est pas encore idéal.

Finalement, si nous prenons le point P_2 comme point d'arrivée, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{1;2}}$ "va" dans la direction du mouvement.

Remarque 2 (vitesses moyennes plus ou moins constantes). La longueur des différentes vitesses reste à peu près constante. En effet, si nous ne sommes pas dans un cas "trop exotique" où la vitesse "au compteur" ne varie pas de trop et nous supposerons que c'est le cas ici, chaque fois que Δt diminue, la longueur du déplacement diminue en même proportion. Et donc $\frac{v_{1;5}}{\Delta t_{1;5}} \simeq \frac{v_{1;4}}{\Delta t_{1;4}} \simeq \ldots \simeq \frac{v_{1;2}}{\Delta t_{1;2}} = cste.$

2. et donc, aussi, en chaque point du parcours

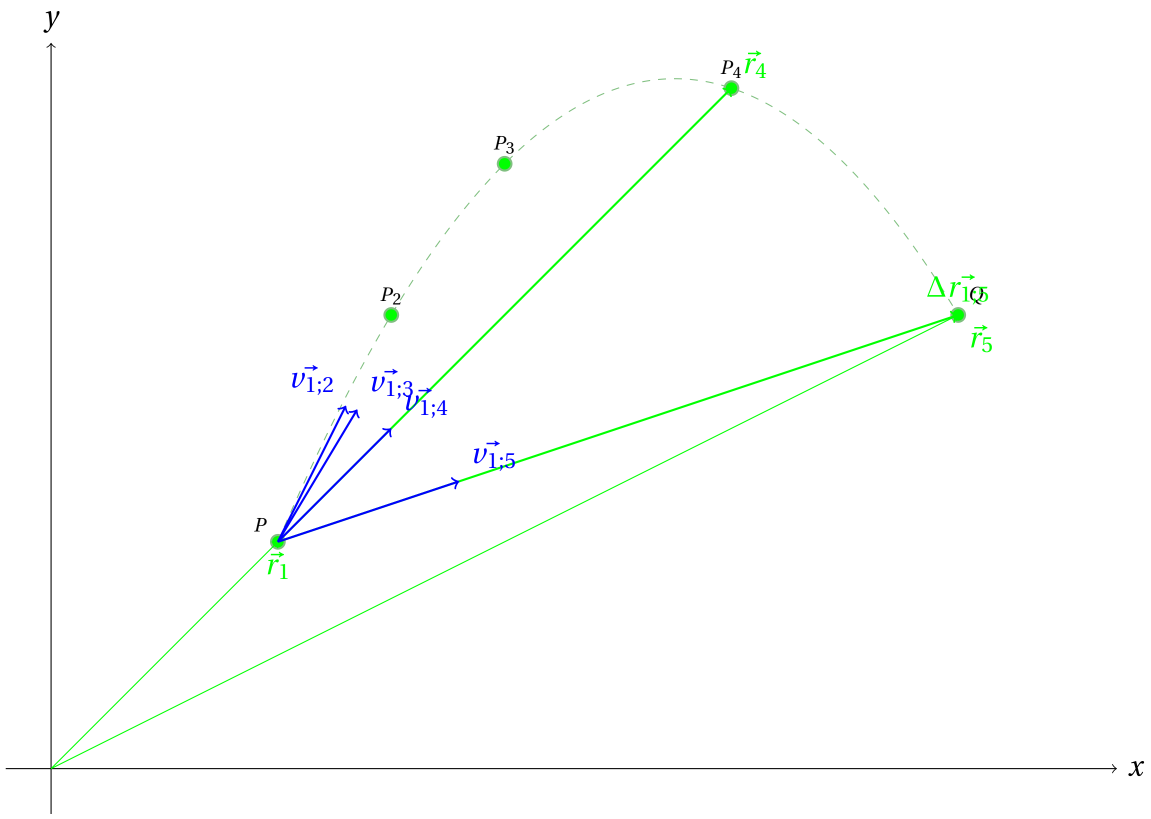


FIGURE 4.5 – De la vitesse moyenne à la vitesse instantanée.

Nous dirons que :
- Le point P_2 tend vers P_1 ;
- la date t_2 tend vers t_1 ;
- le vecteur vitesse moyenne tend vers le vecteur vitesse instantanée.

(i) Tangente Il est aussi évident que le vecteur vitesse instantanée au point P est tangent à la trajectoire.

C'est une propriété importante que nous exploiterons par la suite.

b) Définition

Le point précédent suggère donc de prendre la vitesse instantanée comme limite de la vitesse moyenne.

Définition 16 (vecteur vitesse instantanée)**.** Le vecteur vitesse instantanée $\overrightarrow{v_{inst}(t)}$ d'un mobile à un instant t est le rapport entre le vecteur déplacement $\overrightarrow{\Delta r}$ (à partir de la position de départ càd. au temps t) et la durée Δt nécessaire pour accomplir ce déplacement, avec un Δt très petit.

$$\overrightarrow{v_{inst}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \tag{4.3}$$

où
- $\overrightarrow{v_{inst}}$ est le vecteur vitesse instantanée (Unité SI : m s^{-1}) ;
- $\overrightarrow{\Delta r}$ est le vecteur déplacement (Unité SI : m) ;
- Δt est la durée tendant vers zéro (Unité SI : s).

c) En pratique : Δt petit ! Mais petit comment ?

En pratique, Δt est aussi petit que le contexte le précise : Si on étudie le mouvement d'une balle de fusil, un Δt d'un millième de seconde sera peut-être nécessaire ; si nous étudions le mouvement d'un escargot, un Δt d'une dizaine de secondes est sans doute suffisant.

(i) Chronophotographie Une des techniques que nous utiliserons pour étudier le mouvement sera celle de la "chronophotographie".

Ces techniques consistent à éclairer un objet ou une scène avec un stroboscope. Les flash du stroboscope sont réguliers : la durée entre chaque flash est notre Δt (typiquement 1/30s). Un appareil photographique est placé face à l'objet en parallèle avec le stroboscope. L'appareil photographique est ouvert "en pose" pendant toute la durée du mouvement. Les différentes positions de l'objet apparaissent donc sur une photographie. Une règle graduée est placée à la même distance de l'appareil photographique que l'objet.

En faisant quelques simples règles de trois pour faire des calculs d'échelle, on peut analyser numériquement le mouvement.

Souvent, on photographie ainsi un objet clair sur un fond sombre.

(ii) Exercices En supposant que notre athlète fait deux mètres de haut, déterminez les déplacements et les vitesses instantanées des figures du cours :

1. fig. 3.1 p. 18
2. fig. 3.3 p. 19

d) Propriétés du point de vue de la physique mathématique

Nous savons bien sûr qu'une limite comme celle de la définition 4.3 est une dérivée.

Réécrivons la définition (et pour simplifier l'écriture, sans les vecteurs) dans ce sens :

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \tag{4.4}$$

La vitesse instantanée est la dérivée de la position par rapport au temps.

Inversement, nous pouvons réécrire l'équation 4.4 comme suit :

$$dr = v_{inst} \cdot dt \tag{4.5}$$

Et si nous intégrons sur un déplacement d'une position initiale r_i occupée à une date t_i vers une position finale r_f occupée à une date t_f , nous obtenons :

$$\Delta r = \int_{r_i}^{r_f} dr = \int_{t_i}^{t_f} v_{inst}\, dt \tag{4.6}$$

Le déplacement d'un mobile entre deux positions est égal à l'intégrale de la vitesse de ce mobile sur la durée du déplacement.

Nous reviendrons sur cette propriété.

Notons également que cette propriété est valable en notation vectorielle :

$$\overrightarrow{\Delta r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} dr = \int_{t_i}^{t_f} \overrightarrow{v_{inst}}\, dt \tag{4.7}$$

3 Exercices

1. Vitesses moyennes :

   (a) Si un mobile parcourt 1 km à la vitesse de $90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ puis 1 km à la vitesse de $180\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Quelle aura été sa vitesse moyenne sur ces 2 km.

   — Données :
     — $v_1 = 90\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
     — $v_2 = 180\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
     — $\Delta r_1 = 1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$
     — $\Delta r_2 = 1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$

   — Inconnue : $v_{moy} = ?$

   — Formules :
     — $v_{moy} = \frac{\Delta r_{tot}}{\Delta t_{tot}}$
     — $\Delta t = \frac{\Delta r_{tot}}{v}$

   — Résolution :
     — $\Delta t_1 = \frac{\Delta r_1}{v_1} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 40\,\mathrm{s}$
     — $\Delta t_2 = \frac{\Delta r_2}{v_2} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{50\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 20\,\mathrm{s}$
     — $v_{moy} = \frac{\Delta r_{tot}}{\Delta t_{tot}} = \frac{2000\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} \simeq 33{,}33\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Chapitre 5

Mouvements rectilignes

Sommaire

Introduction

Nous nous intéresserons ici aux mouvements rectilignes en toute généralité.

1 Définition

Définition 17 (mouvement rectiligne)**.** Un mouvement est dit rectiligne si tous les déplacements se font dans une seule direction.

Et donc, comme la trajectoire est une courbe continue, tout mouvement rectiligne a lieu sur une seule droite.

Tout vecteur déplacement aura la même direction que celle du mouvement et le sens de tout vecteur déplacement sera aussi celui du mouvement.

A L'axe OX : mouvements dans $\mathbb{R}$

Tous les mouvements rectilignes sont à une dimension.

Tous les mouvements rectilignes ayant lieu sur une droite, le choix d'un système de référence s'impose naturellement : la droite sera la droite des réels et aussi l'axe (par ex. :OX) du système de référence.

2 Simplification des notations

A Le vecteur déplacement

Étudions le vecteur déplacement à une dimension :

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r_x} = \Delta r_x \overrightarrow{1_x}$$

En effet, seule la composante du vecteur parallèle à l'axe OX existe.

Ceci suggère des simplifications supplémentaires :

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r_x} = \Delta r_x = \Delta r$$

En effet, la seule composante du vecteur étant en x, donner la norme du vecteur (avec son signe) suffit pour donner toute l'information nécessaire pour déterminer le vecteur.

B Les vecteurs vitesses

Étudions les vecteurs vitesses à une dimension, sans nous préoccuper pour l'instant de s'il s'agit de vitesse moyenne ou instantanée.

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_x}$$

Ici aussi, seule la composante du vecteur parallèle à l'axe OX existe puisque nous savons que les vecteurs vitesses sont parallèles aux vecteurs déplacements et que TOUS les vecteurs déplacements dans le cas qui nous occupe sont parallèles à l'axe !

Ceci suggère des simplifications supplémentaires :

$$\overrightarrow{v_x} = v_x = v$$

C Définitions (ou de l'art de faire du neuf avec du vieux)

Et nous pourrons dès lors écrire :

Définition 18 (déplacement rectiligne)**.** Dans le cas d'un mouvement rectiligne, le déplacement Δr est la grandeur $r_f - r_i$ caractérisant la variation de position du mobile M de P_i vers P_f.

Définition 19 (vitesse rectiligne)**.** Dans le cas d'un mouvement rectiligne, la vitesse est le rapport entre le déplacement et la durée nécessaire pour l'accomplir.

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \tag{5.1}$$

où

— v est la vitesse (Unité SI : $\mathrm{m\,s^{-1}}$) ;

— Δr est le déplacement (Unité SI : m) ;

— $\Delta t = t_f - t_i$ est la durée nécessaire pour effectuer le déplacement (Unité SI : s) ;

— t_f et t_i sont les dates, respectivement finale et initiale, du déplacement considéré (Unité SI : s) .

Nous ne précisons volontairement pas s'il s'agit d'une vitesse moyenne ou instantanée !

3 Sens et signes des vecteurs déplacements et vitesses

Utilisons encore un peu les vecteurs.

A Graphiques déplacement et vitesse

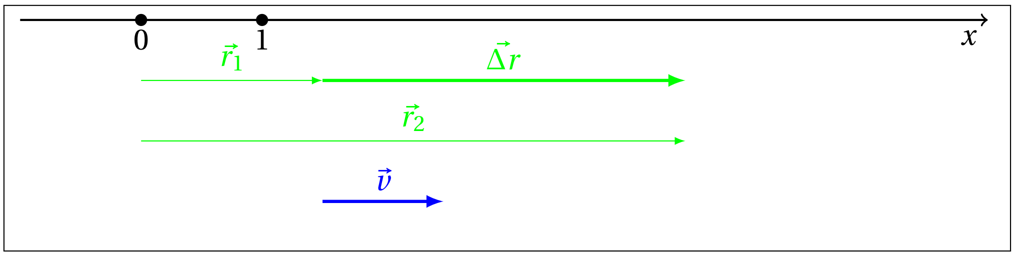


FIGURE 5.1 – Sens et signes des vecteurs déplacements et vitesses : $r_1 \& r_2 \geqslant 0, r_2 > r_1 \Rightarrow v > 0$.

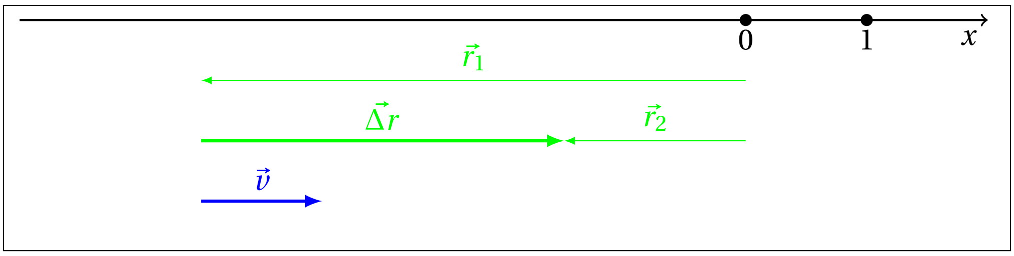


FIGURE 5.2 – Sens et signes des vecteurs déplacements et vitesses : $r_1 \& r_2 \leqslant 0, r_2 > r_1 \Rightarrow v > 0$.

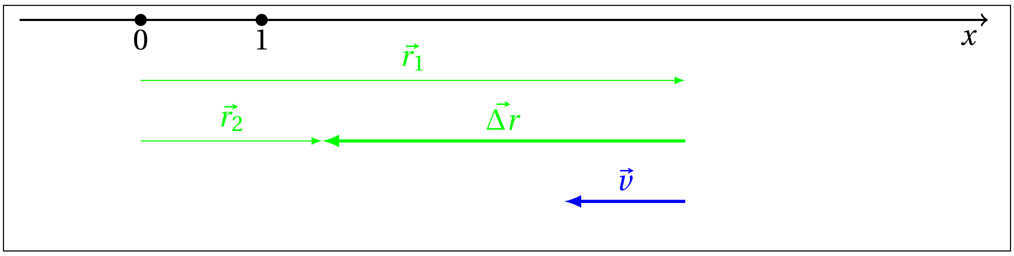


FIGURE 5.3 – Sens et signes des vecteurs déplacements et vitesses : $r_1 \& r_2 \geqslant 0, r_2 < r_1 \Rightarrow v < 0$.

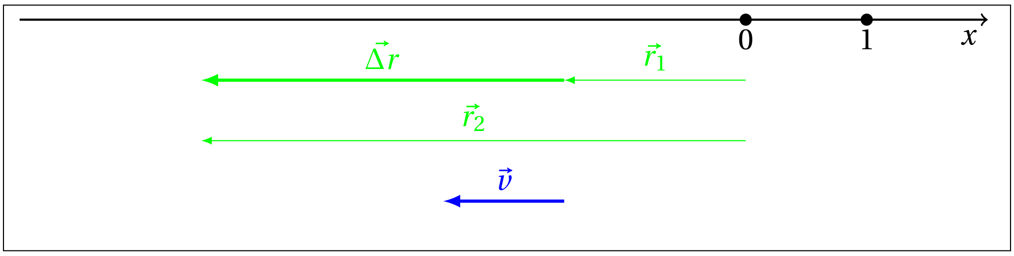


FIGURE 5.4 – Sens et signes des vecteurs déplacements et vitesses : $r_1 \& r_2 \leqslant 0, r_2 < r_1 \Rightarrow v < 0$.

Si le mouvement est dans le sens de l'axe, le déplacement est positif. QUELQUES SOIENT les positions de départ et d'arrivée.

Si le mouvement est dans le sens contraire de l'axe, le déplacement est négatif. QUELQUES SOIENT les positions de départ et d'arrivée.

Les vitesses obéiront aux mêmes règles.

B Vitesses négatives

La définition vectorielle de la vitesse fait apparaître ici des vitesses négatives. Il peut sembler absurde à certains d'avoir des vitesses négatives.

Propriété 3 (Signe et sens de la vitesse)**.** *Le signe de la vitesse nous donne son sens sur l'axe choisi !*

4 Étude d'un mouvement rectiligne : différents types de mouvements rectilignes

Étudions le mouvement rectiligne d'un mobile et réalisons un graphique de sa position en fonction du temps.

FIGURE 5.5 – Un objet important en mouvement.

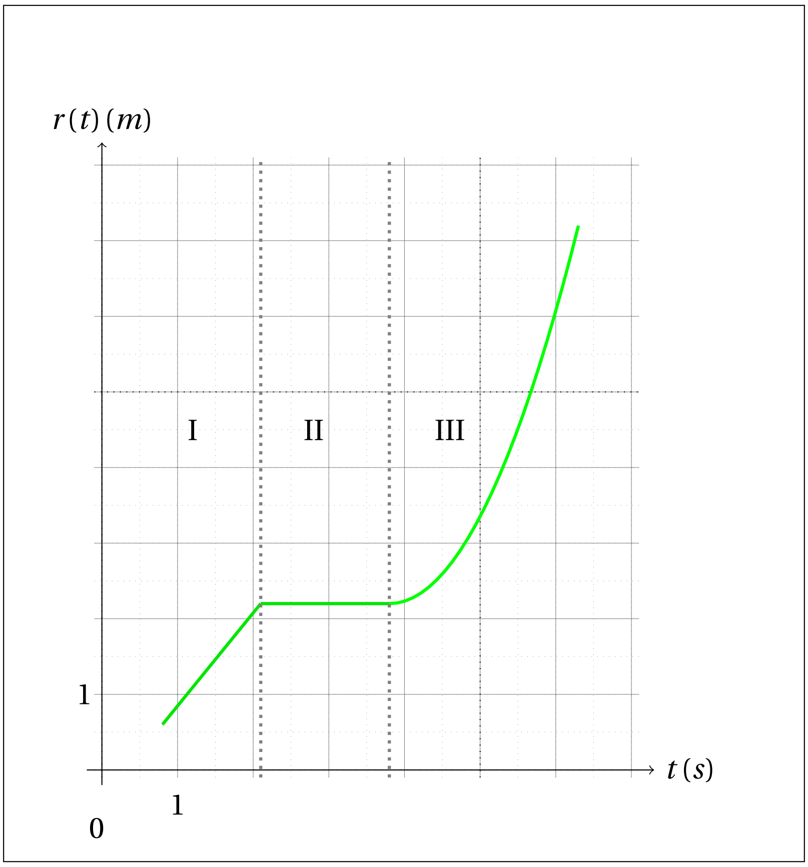


FIGURE 5.6 – L'évolution de la position au cours du temps.

Clairement, ce graphique nous renseigne sur l'existence de différents types de mouvements rectilignes.

Distinguons les :

A MRU

Dans la première partie du mouvement, la vitesse est constante.

B Repos

Dans la deuxième partie du mouvement, la position est constante. Le mobile est immobile ! On parle de "repos".

C MRUV

Finalement, dans la troisième partie du graphique, la vitesse augmente. Il faut réintroduire la vitesse instantanée.

Pour l'instant, nous parlerons de "mouvement rectiligne uniformément varié" ou MRUV.

5 Exercices

Chapitre 6

MRU

Sommaire

Introduction

Dans le chapitre précédent (Positions, déplacements vitesses), nous avons étudié la manière dont la distance change avec le temps qui passe. Nous avions discuté de la vitesse. La relation (la loi) qui liait l'évolution de la position au temps qui passait avait été définie comme la vitesse : $v = \Delta r / \Delta t$ (m/s).

1 Définition et conséquences

Définition 20 (MRU)**.** Si la trajectoire d'un mobile est rectiligne et sa vitesse constante, le mouvement est défini comme "Mouvement Rectiligne Uniforme" ou MRU.

A Conséquences

Il n'y pas lieu de faire la différence entre la vitesse moyenne et la vitesse instantanée puisque la vitesse est constante !

En MRU :

$$\text{MRU : } v_{moy} = v_{inst} = v \tag{6.1}$$

2 Graphe de la position en fonction du temps

Si nous faisons un graphique avec t en x et r en y, nous avons une droite.

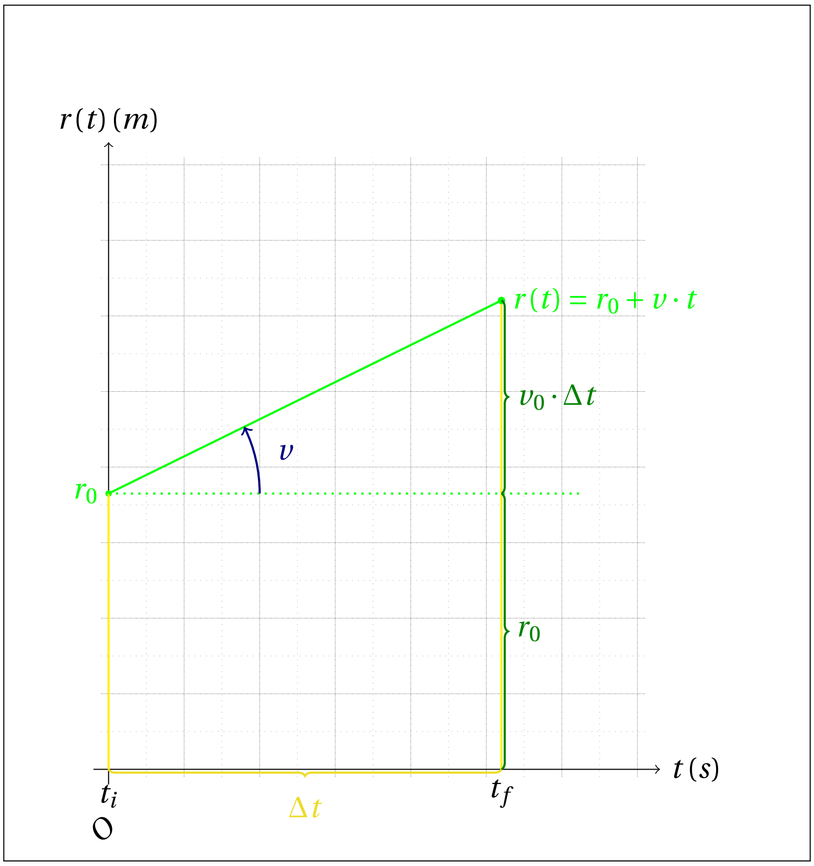


FIGURE 6.1 – Graphique de la position en fonction du temps en MRU.

Faisons un parallèle entre l'équation de la droite et l'équation de droite en général :

$$y = m \cdot x + p \tag{6.2}$$

$$r_f = v \cdot \Delta t + r_i \tag{6.3}$$

(i) Conclusion L'étude d'un MRU peut se ramèner à l'étude d'un fonction du premier degré.
La vitesse correspond à la pente de la droite.
r_0 correspond à l'ordonnée à l'origine de la droite.
La pente de la droite permet de distinguer un mouvement rapide d'un mouvement lent.

3 Graphe de la vitesse en fonction du temps

Réalisons le graphique de $v(t)$,.

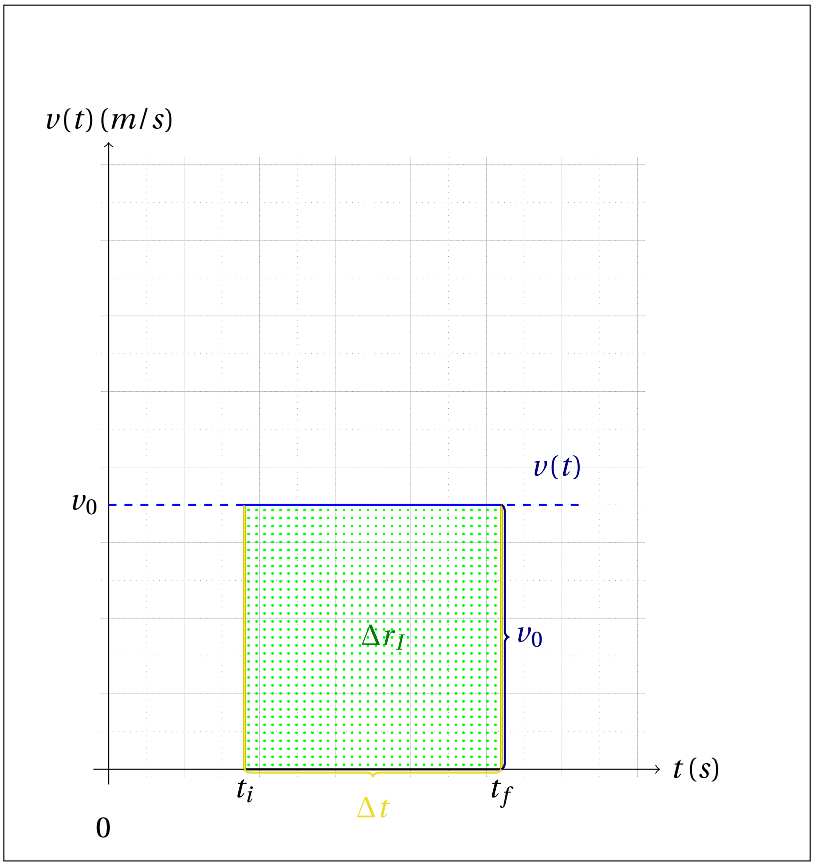


FIGURE 6.2 – Graphique de la vitesse en fonction du temps en MRU.

La surface sous la courbe de $v(t)$ est le déplacement parcouru en une durée Δt. La surface est ici un rectangle.
Ceci correspond bien à l'intégrale 4.6 vue à la page 41.

$$r_f - r_i = v \cdot \Delta t \tag{6.4}$$

peut aussi s'écrire :

$$\Delta r = v \cdot \Delta t \tag{6.5}$$

4 Problèmes de croisement

Les problèmes de croisement impliquent d'étudier le mouvement d'au moins deux mobiles.

A Croisement et systèmes d'équations

Clairement, les problèmes de MRU peuvent donc être résolu en utilisant une équation du premier degré. Et donc s'il y a deux mobiles, il y aura deux équations du premier degré.

Une pour le mobile "A" :

$$r_{Af} = v_A \cdot \Delta t_A + r_{Ai} \tag{6.6}$$

Et une pour le mobile "B" :

$$r_{Bf} = v_B \cdot \Delta t_B + r_{Bi} \tag{6.7}$$

Que signifie : "croisement" ?

a) Croisement

Deux mobiles se croisent lorsqu'ils occupent la même position au même instant.
Si nous appelons respectivement r_c la position du croisement et t_c l'instant du croisement.
Et si nous substituons dans les équations 6.6 et 6.7, nous obtenons les équations suivantes :

$$r_c = v_A \cdot (t_c - t_{Ai}) + r_{Ai} \tag{6.8}$$

$$r_c = v_B \cdot (t_c - t_{Bi}) + r_{Bi} \tag{6.9}$$

Déterminer r_c et t_c revient donc à résoudre le système de deux équations à deux inconnues (r et t) suivant :

$$\begin{cases} r = v_A \cdot (t - t_{Ai}) + r_{Ai} \\ r = v_B \cdot (t - t_{Bi}) + r_{Bi} \end{cases} \tag{6.10}$$

B Détermination des paramètres

Des difficultés peuvent surgir s'il y a plusieurs mobiles qui ne démarrent pas nécessairement en même temps, ni du même point de départ. La notion de Δt doit alors être convenablement considérée. Il faut réaliser que ce Δt n'est pas le même pour les différents mobiles.

Développons cette formule :

$r(t) - r_0(t_0) = v.(t - t_0)$

a) En partant de la position 0, en fixant l'instant du départ comme zéro.

$\Delta r = v.\Delta t$

devient

$r(t) = v.t$

b) En partant de la position r_0, en fixant l'instant du départ comme zéro.

$\Delta r(\Delta t) = v.\Delta t$

devient

$r(t) = r_0 + v.t$

c) En partant de la position r_0, l'instant du départ est t_0.

$\Delta r(\Delta t) = v.\Delta t$
devient
$r(\Delta t) = r_0 + v.\Delta t$

5 exercices

1. Un marcheur parcourt 3 km en 40 min. Quelle est sa vitesse moyenne ?
   $1{,}25\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 4{,}5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
2. En ski de fond, un sportif a une vitesse de $2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Combien de temps lui faut-il pour parcourir 4,5 km ?

   30 min
3. Dans l'air, on considère que la vitesse du son vaut $343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La vitesse de la lumière, elle, vaut approximativement $3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Lors d'un feu d'artifice, un spectateur se trouve à 2 km du lieu de tir. Après combien de temps percevra t' il la lumière et le son de l'explosion ?
   $6{,}67 \times 10^{-6}$ s et 5,83 s
4. Un sonar est utilisé pour mesurer la profondeur de la mer. Des ultrasons sont émis. Ils se réfléchissent sur le fond et reviennent vers le bateau émetteur. La vitesse des ultrasons dans l'eau est $1450\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Si l'écho est reçu 1,6 s après son émission, quelle est la profondeur de la mer à cet endroit ?

   1160 m
5. Quelle est la vitesse moyenne d'un point à l'équateur ? (Rayon de la Terre = $6{,}38 \times 10^3$ km)
   $464\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 1671\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
6. Deux voitures partent en même temps d'un même point de départ. Elles doivent se rendre à une localité située à 120 km de là. La première voiture fait tout le trajet à une vitesse constante de $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. La seconde fait les 60 premiers kilomètres à une vitesse de $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, puis les les 60 derniers kilomètres à une vitesse de $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Quelle voiture arrive la première ? (Justifiez par calcul et par graphique.)

   Première voiture : 2 h

   Deuxième voiture :2,25 h (ou 2 h 15 min.)
7. Un jeune enfant joue à 5 m de sa mère et se met soudain à courir en s'éloignant d'elle à la vitesse de $1{,}8\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Deux secondes plus tard, la mère démarre pour le rattraper à la vitesse constante de $7{,}2\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Quelle distance l'enfant aura t' il parcouru ? Pendant combien de temps a t' il couru ? (Résoudre par graphique "position en fct. du temps" et par calcul.)
   L'enfant court pendant 6 s et aura couru sur 3 m. La mère aura couru pendant 4 s sur 8 m.
8. Deux voitures sont éloignées de 180 km et partent en même temps l'une vers l'autre. La première voiture fait tout le trajet à une vitesse constante de $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. La seconde roule à une vitesse de $90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. À quelle distance du point de départ de la première voiture et combien de temps après leur départ, les voitures vont elles se croiser ? (Justifiez par calcul et par graphique.)

   72 km, 1,2 h (ou1 h 12 min.)
9. Une automobile parcourt un trajet de 60 km en 1 h. Le premier tiers de la distance est parcouru à une vitesse qui est double de celle à la quelle la voiture roule sur les deux derniers tiers du trajet. Quelles sont ces vitesses ?
   $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ et $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

10. Deux frères Borlée partent simultanément pour une course. Le premier a une vitesse v_1 et le second une vitesse v_2. Le second franchit la ligne de départ avec un temps T de retard par rapport au premier. Quelle distance les deux coureurs ont ils franchie ?

    Résolvez littéralement !

    $\begin{cases} v_1 = \frac{\Delta r}{\Delta t} \\ v_2 = \frac{\Delta r}{\Delta t + T} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta r = v_1 \Delta t \\ \Delta r = v_2(\Delta t + T) \end{cases}$

    $v_1 \Delta t = v_2(\Delta t + T)$

    $v_1 \Delta t - v_2 \Delta t = v_2 T)$

    $\Delta t = \frac{v_2 T}{v_1 - v_2}$

    $\Delta r = \frac{v_1 v_2 T}{v_1 - v_2}$

    Calculez le temps et la distance si $v_1 = 36\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, $v_2 = 34{,}2\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ et $T = 0{,}6\,\mathrm{s}$.

    $\Delta t = \frac{9{,}5 \cdot 0{,}6}{10 - 9{,}5} = \frac{5{,}7}{0{,}5} = 11{,}4\,\mathrm{s}$

    $\Delta r = \frac{10 \cdot 9{,}5 \cdot 0{,}6}{0{,}5} = 114\,\mathrm{m}$

Chapitre 7

Variation de vitesse et accélération

Sommaire

Introduction

1 Vitesses variables

A Vecteur variation de vitesse

a) Mise en situation

Décrivons le mouvement de lancer d'une boule de pétanque !

FIGURE 7.1 – "Tu tires ou tu pointes ?"

Étudions le vecteur vitesse instantanée entre des instants très proches.

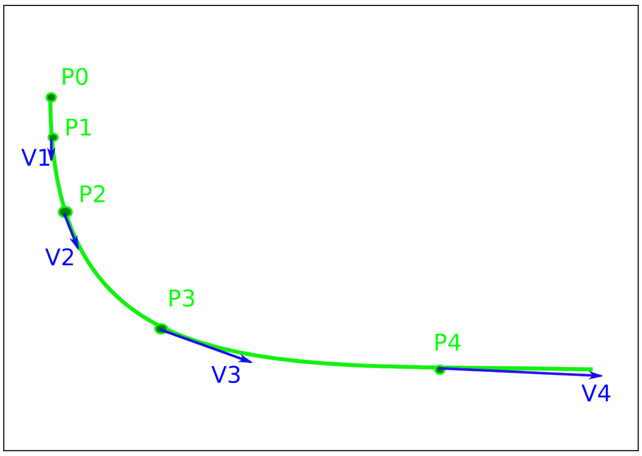


FIGURE 7.2 – Le vecteur vitesse à la pétanque.

Clairement il y a une évolution entre deux vitesses successives.

b) Définition

Il est donc nécessaire d'étudier la variation entre deux vitesses successives.
C'est pourquoi on définit le vecteur variation de vitesse.

Définition 21 (Vecteur variation de vitesse)**.** Nous définirons le vecteur variation de vitesse comme la différence entre le vecteur vitesse instantanée final et le vecteur vitesse instantanée initial.

$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v_f} - \vec{v_i} \tag{7.1}$$

B Démarrage de voiture

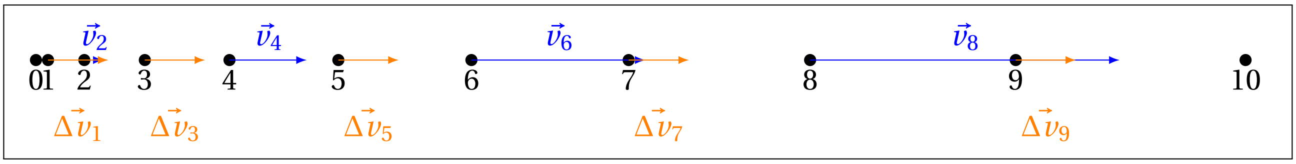


FIGURE 7.3 – La voiture accélère. La différence de vitesse est constante.

Ici, la vitesse augmente en grandeur mais pas en direction. Le vecteur variation de vitesse est de même direction que la vitesse.

C Centrifugeuse

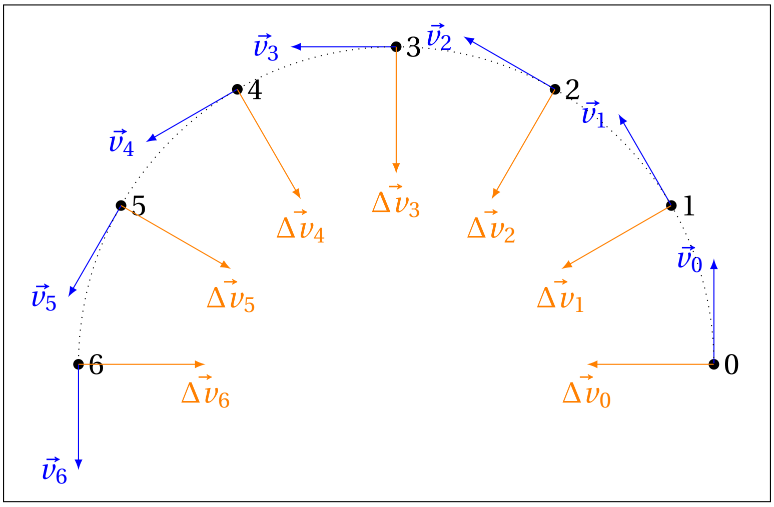


FIGURE 7.4 – Dans ce mouvement circulaire, la différence de vitesse est dirigée vers le centre.

Ici, la vitesse ne change pas en grandeur mais uniquement en direction. Le vecteur variation de vitesse est perpendiculaire à la vitesse.

2 Variation de vitesse et accélération

A Vecteur accélération

Pour que l'étude de la variation de vitesse prenne tout son sens, il faut pouvoir comparer ce qui est comparable. Nous allons donc diviser la variation de vitesse par la durée nécessaire pour l'accomplir.

a) Définition

Ce faisant, nous définissons une nouvelle grandeur : le "vecteur accélération". Et nous dirons, plus simplement, "l'accélération" [1].

Définition 22 (vecteur accélération)**.** L' accélération $\vec{a}$ est la variation de vitesse par unité de temps.

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \tag{7.2}$$

où,
— $\vec{a}$ = l'accélération ($\mathrm{m\,s^{-2}}$).

Une accélération de 1 $\mathrm{m\,s^{-2}}$ correspond donc à une vitesse qui augmente de 1 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ par seconde.

b) Ordres de grandeur

Exemples	a ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)
Démarrages	
TGV	0,4
métro	1,3
ascenseur	2
auto (+)	3
bille dans une catapulte	50
flèche	5000
Freinages :	
auto	-8
parachute à l'ouverture	- 200
ballon entrant en contact avec un mur	- 5000

TABLE 7.1 – Ordre de grandeurs d'accélérations.

B Vecteur accélération instantanée

Ici aussi, pour étudier l'accélération en toute généralité, il faut envisager de l'étudier à chaque instant. Il faut étudier l'accélération *instantanée*.

a) Définition

Définition 23 (vecteur accélération instantanée)**.** L' accélération instantanée $\overrightarrow{a(t)}$ est l' accélération à un instant t.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \tag{7.3}$$

où,
— $\overrightarrow{a(t)}$ = l'accélération instantanée ($\mathrm{m\,s^{-2}}$).

1. C'est volontairement que nous confondons les termes "accélération" et "vecteur accélération". Nous les considérons désormais comme interchangeables.

3 Accélération, dérivées et intégrales

A L' accélération instantanée et les dérivées

Comme pour la vitesse instantanée (voir éq. 4.4 p. 41), l' accélération peut être vue comme une dérivée. Mais ici, l' accélération sera la dérivée première de la vitesse en le temps. Ici aussi, nous oublions un instant l' écriture vectorielle pour alléger les notations.

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{7.4}$$

Mais nous pouvons aller plus loin ! Comme la vitesse instantanée est elle-même la dérivée de la position, l'accélération sera la dérivée *seconde* de la position.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d\frac{dr}{dt}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \tag{7.5}$$

B Accélération et intégrales

a) variation de vitesse

Si l'accélération peut être traitée comme une dérivée première de la vitesse, nous pouvons faire un raisonnement analogue à celui fait concernant la vitesse instantanée (voir éq. 4.5 p. 41).

$$dv = a(t) \cdot dt \tag{7.6}$$

Et si nous intégrons l'équation précédente, nous obtenons :

$$\Delta v = \int_{v_i}^{v_f} dv = \int_{v_i}^{v_f} a(t)\, dt \tag{7.7}$$

b) déplacement

Poussons le raisonnement précédent un peu plus loin. Comme le déplacement est l'intégrale de la vitesse en le temps et que la variation de vitesse est l'intégrale de l'accélération, le déplacement sera l'intégrale seconde de l'accélération.

$$\Delta r = \int_{t_i}^{t_f} v_{inst}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt^2 \tag{7.8}$$

c) Une application : frottement aérodynamique

Comme premier exemple d'application des points précédents, nous allons traiter le cas du frottement dynamique d'un projectile dans un fluide. Le fluide pouvant être l'air, de l'eau ou d'autres gaz ou liquides.

L'accélération sera du type "freinage" et s'opposera à la vitesse.

Choisissons une situation telle qu'il n'y ait pas d'autre accélération que celle due au freinage.

En première approximation, supposons que la relation entre l'accélération et la vitesse instantanée soit la suivante :

$$a(t) = -bv(t) \tag{7.9}$$

où :
— $a(t)$ est l'accélération instantanée du projectile (en $\mathrm{m^2\,s^{-1}}$) ;

— b est un coefficient[2] traduisant le frottement[3] ;
— $v(t)$ est la vitesse instantanée du projectile (en $\mathrm{m^2\,s^{-1}}$) ;

4 Le vecteur accélération comme somme de vecteurs perpendiculaires

A Retour sur les exemples

Revenons sur les exemples du début de ce chapitre.

a) La voiture

Lorsque la voiture accélérait ou freinait sur une trajectoire rectiligne, seule la norme du vecteur accélération était modifiée.

Remarquons aussi que, dans nos exemples, lorsque le mouvement est rectiligne et que la variation de vitesse ne se fait qu'en grandeur (le cas des voitures), l'accélération est dans la direction de la vitesse.

Comme la vitesse est tangentielle à la trajectoire, l'accélération l'est aussi : on dit que c'est l'accélération "*tangentielle*".

L'accélération tangentielle rend compte du changement en norme de la vitesse.

b) L'essoreuse

Dans le cas de l'essoreuse, le vecteur accélération était dirigé vers l'axe de rotation.

Par contre, si la grandeur de la vitesse ne change pas mais que sa direction change (c'est aussi le cas de la fronde), l'accélération est dans une direction perpendiculaire à celle de la vitesse.

Ici aussi, comme la vitesse est tangentielle à la trajectoire : on dit que c'est l'accélération "*normale*".

L'accélération normale rend compte de la variation de la vitesse en direction.

B Accélérations normale et tangentielle

Dans l'espace, un vecteur peut toujours être vu comme la somme de deux autres vecteurs.

Le vecteur accélération a donc deux composantes :
— une composante tangentielle $\overrightarrow{a_t(t)}$
— et une composante normale $\overrightarrow{a_n(t)}$.

En toute généralité, nous pouvons écrire

$$\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{a_t(t)} + \overrightarrow{a_n(t)} \tag{7.10}$$

L'accélération tangentielle rend compte du changement en norme de la vitesse.

L'accélération normale rend compte du changement de la vitesse en direction.

Remarque 3. L'accélération normale pointe toujours vers la partie concave de la trajectoire.

Par contre, la partie tangentielle peut pointer dans le sens du mouvement (accélération) ou dans le sens opposé (freinage).

5 Exercices

2. A parfois de coefficient de traînée.
3. "b" dépendra, entre autres, de la géométrie du projectile et de sa densité.

Chapitre 8

MRUA

Sommaire

Introduction

1 MRUA

A Notations

Comme pour le MRU (voir 2 p. 44), les notations peuvent se simplifier du fait que nous étudions un mouvement à une seule dimension.

Donc, "$\overrightarrow{\Delta v}$ " deviendra "Δv et "$\overrightarrow{a}$ " deviendra "a.

B Définition

Définition 24 (MRUA)**.** Le *Mouvement Rectiligne Uniforme* (ou MRUA) est un mouvement rectiligne (rappel : Mouvement continu sur une seule direction)
et d'accélération constante.

2 Sens des vitesses et signe de l'accélération

Nous allons établir les liens entre l'évolution des vitesses et le signe de l'accélération.

A En utilisant les vecteurs

a) La vitesse "compteur" augmente : une accélération

(i) Mouvement dans le sens de l'axe Premier cas : $v_1 \& v_2 \geqslant 0, v_2 > v_1 \Rightarrow a > 0$

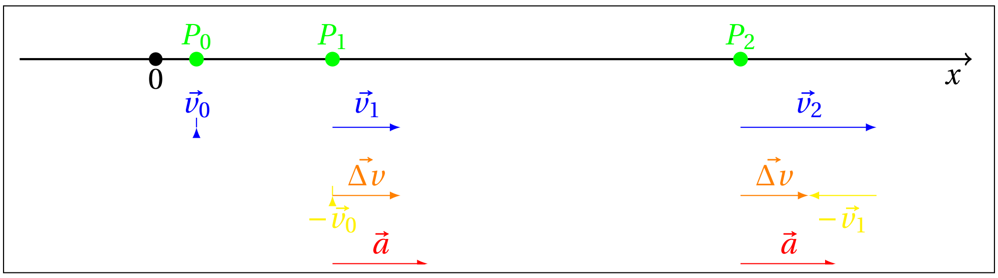


FIGURE 8.1 – Variation de la vitesse avec un mouvement dans le sens de l'axe.

(ii) Mouvement dans le sens opposé à celui de l'axe $v_1 \& v_2 < 0, v_2 < v_1 \Rightarrow a < 0$

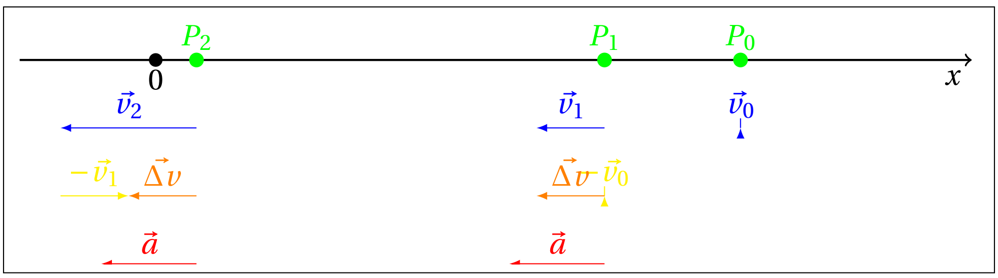


FIGURE 8.2 – Variation de la vitesse avec un mouvement dans le sens opposé de celui de l'axe.

b) La vitesse "compteur" diminue : une décélération

(i) Mouvement dans le sens de l'axe $v_1 \& v_2 < 0$, $v_2 < v_1 \Rightarrow a < 0$

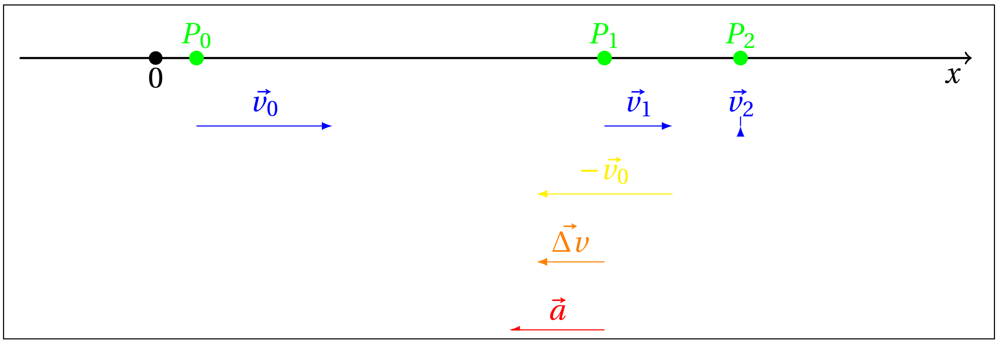


FIGURE 8.3 – Variation de la vitesse avec un mouvement dans le sens de l'axe.

(ii) Mouvement dans le sens opposé à celui de l'axe $v_1 \& v_2 < 0$, $v_2 < v_1 \Rightarrow a > 0$

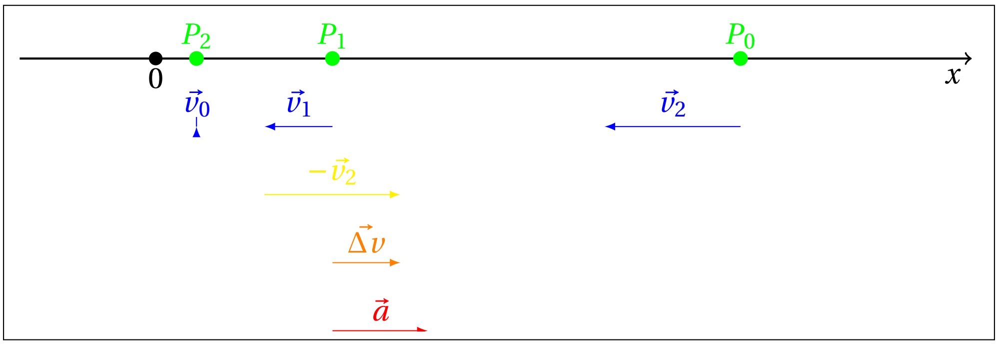


FIGURE 8.4 – Variation de la vitesse avec un mouvement dans le sens opposé de celui de l'axe.

c) Conclusion

$\vec{v}$ et $\overrightarrow{\Delta v}$ de même sens = accélération
$\vec{v}$ et $\overrightarrow{\Delta v}$ de sens opposés = décélération

B En n' utilisant *pas* les vecteurs

Prenons quelques exemples numériques pour éclaircir la chose. On pourra comparer ces exemples aux schémas vectoriels précédents.

a) La vitesse "compteur" augmente : une accélération

(i) Mouvement dans le sens de l'axe Si Le mobile se déplace dans le sens de l'axe et "accélère".

Si $v_1 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et si, un seconde plus tard, $v_2 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ alors $\Delta v = 5 - 2 = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $a = 3/1 = 3\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$.

(ii) Mouvement dans le sens opposé à celui de l'axe Si $v_1 = -2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et si, un seconde plus tard, $v_2 = -5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ alors $\Delta v = -5 - (-2) = -3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $a = -3/1 = -3\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$.

b) La vitesse "compteur" diminue : une décélération

(i) Mouvement dans le sens de l'axe Si $v_1 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et si, un seconde plus tard, $v_2 = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ alors $\Delta v = 2_5 = -3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $a = -3/1 = -3\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$.

(ii) Mouvement dans le sens opposé à celui de l'axe Si $v_1 = -5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et si, un seconde plus tard, $v_2 = -2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ alors $\Delta v = -2-(-5) = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $a = -3/1 = 3\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$.

c) Conclusion

Résumons ces exemples dans un tableau.

Ex.	signe de v	signe de a	signification
1	+	+	Mvt. ds. sens de l'axe, accéléré
2	-	-	Mvt. ds. sens contraire de l'axe, accéléré
3	+	-	Mvt. ds. sens de l'axe, décéléré
4	-	d	Mvt. ds. sens contraire de l'axe, décéléré

TABLE 8.1 – Signes de v et de a.

$\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\Delta v}$ de même sens = accélération
$\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\Delta v}$ de sens opposés = décélération

3 Lois de l'accélération

A La loi des vitesses

Dans un mouvement rectiligne, la définition de l'accélération s'écrit sous forme scalaire. Comme l' accélération est constante, nous pouvons écrire :

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{8.1}$$

Si nous utilisons un chronomètre, $t_1 = 0$. Fixons la vitesse v_1 à la mise en marche du chronomètre comme v_0.

De plus, si nous cherchons la vitesse à un temps t, nous pouvons décider que cet instant t est t_2 et que la vitesse v_2 est la vitesse à l'instant t : $v(t)$.

La loi des vitesses s'en déduit facilement :

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \tag{8.2}$$

a) Graphique de $v(t)$

La vitesse est une fonction du premier degré en t.
L' étude du graphique de la fonction $v(t)$ nous fournit une série d'informations.

— v_0 l'ordonnée à l'origine,
— a est la pente.

Exemples : $a_1 < a_2$
$a_3 < 0$

B La loi des espaces

En MRUA, la vitesse $v(t)$ croît uniformément. La vitesse moyenne v_m peut se calculer comme la moyenne des vitesses[1] v_0 et $v(t)$:

$$v_m = \frac{v_0 + v(t)}{2} \tag{8.3}$$

Comme nous sommes dans un mouvement rectiligne, la distance parcourue est égale au déplacement.

Dès lors, par définition de la vitesse moyenne, la distance parcourue est donc égale à

$$\Delta r = v_m \cdot \Delta t \tag{8.4}$$

et comme $t_0 = 0$

$$\Delta r = v_m \cdot t \tag{8.5}$$

Si nous fixons r_0 comme la position initiale et $r(t)$ comme la position à l'instant t, alors :

$$r(t) = r_0 + v_m \cdot t \tag{8.6}$$

Et, si nous nous souvenons de notre définition de la vitesse moyenne, alors :

$$r(t) = r_0 + \frac{v_0 + v(t)}{2} \cdot t \tag{8.7}$$

Mais, par la loi des vitesses, nous savons que $v(t) = v_0 + a \cdot t$, et donc :

$$r(t) = r_0 + \frac{v_0 + v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t \tag{8.8}$$

En simplifiant, on obtient la loi des espaces :

$$r(t) = r_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \tag{8.9}$$

Celle-ci peut aussi s'écrire :

$$r(t) = r_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \tag{8.10}$$

a) Graphique de $v(t)$

En utilisant la loi des vitesses, il est évident que la fonction $v(t)$ est une fonction du premier degré

(i) Caractéristiques de $v(t)$ Remarquons que l'ordonnée à l'origine est la vitesse initiale v_0. La pente de la droite est l'accélération a.

1. En général, la vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses.

(ii) Démonstration graphique de la loi des espaces. Si nous utilisons une propriété vue auparavant (voir 4.6 p. 41) et que nous avions déjà exploitée dans le cas du MRU (voir le point 3 p. 51), il est remarquablement facile de démontrer la loi des espaces.

Nous savons que l'aire de la surface sous la courbe de $v(t)$ est égale au déplacement.

Calculons donc l'aire de cette surface.

Remarquons de suite que la partie inférieure a la forme d'un rectangle. Appelons Δr_I le déplacement correspondant. Il est clair que

$$\Delta r_I = v_0 \cdot \Delta t \tag{8.11}$$

Ce déplacement est la contribution de la vitesse initiale au déplacement total.

La deuxième partie a la forme d'un triangle rectangle. Dès lors, cette surface a pour aire $\frac{1}{2}B \cdot h$. Nommons Δr_{II} le déplacement correspondant. La base du triangle est Δt ; sa hauteur est $\Delta v = a \cdot \Delta t$. Donc

$$\begin{aligned} \Delta r_{II} &= \tfrac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot \; a \cdot \Delta t \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \; a \cdot (\Delta t)^2 \end{aligned} \tag{8.12}$$

Cette partie est la contribution de l'accélération seule au déplacement.

L'aire de la surface totale est égale au déplacement total : $\Delta r_{tot.} = \Delta r_I + \Delta r_{II}$.

Et donc

$$\Delta r_{tot.} = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \; a \cdot (\Delta t)^2 \tag{8.13}$$

Décidons que nous déclenchons notre chronomètre et que nous commençons à mesurer le temps à l'instant $t_O = 0$. Rappelons nous aussi que $\Delta r = r(t) - r_i$.

Si nous disons que $r - i = r_0$, nous retrouvons la loi des espaces :

$$r(t) = r_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \; a \cdot t^2 \tag{8.14}$$

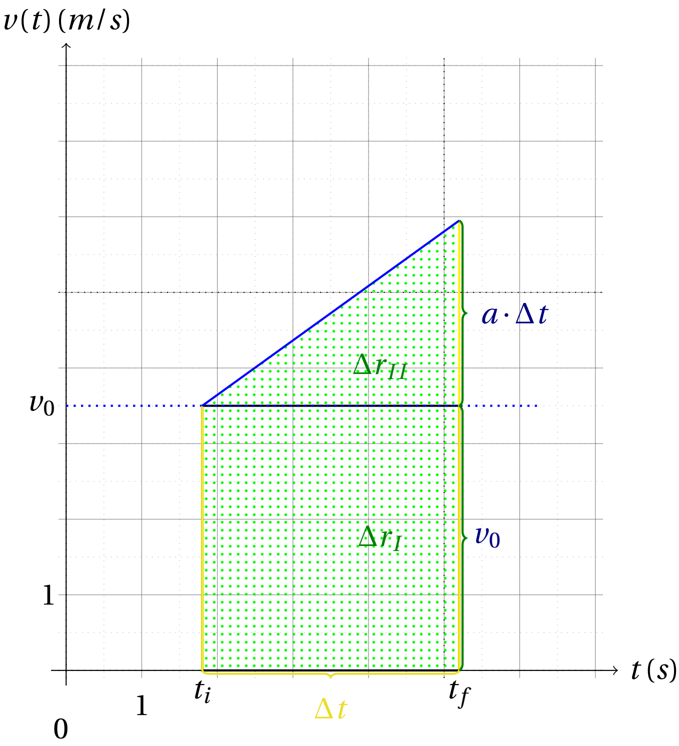


FIGURE 8.5 – Le graphe de $v(t)$ en MRUA.

b) Graphique de $r(t)$

La position est une fonction du deuxième degré en t. Son graphique sera donc celui d'une parabole.

L' étude du graphique de la fonction $r(t)$ nous fournit une série d'informations :
- r_0 l'ordonnée à l'origine,
- $\frac{1}{2}a$ est le coefficient du deuxième degré.

Cas à envisager :
- r_0 à droite du sommet (mouvement toujours dans le même sens) ,
- r_0 à gauche du sommet (mouvement dans un sens puis demi-tour).

4 Exercices

1. Une voiture démarre et atteint la vitesse de 144 km/h en 10 s.
   - Quelle distance a t' elle parcourue ?

     - Données :
       - $v_0 = 0m/s$
       - $v_f = 144,0km/h = 40,0m/s$
       - $t_f = 10s$
     - Inconnues :
       - $\Delta r = ?$
     - Schéma :
     - Formule(s) :
       - $v_f = v_0 + a\cdot\Delta t$

    - $\Delta r = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$
  - Résolution :
    - $a = (v_f - v_0)/\Delta t = \frac{40}{10} = 4\, m/s^2$
    - $\Delta r = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^2 = 200\, m$

2. E pericoloso sporgersi

   Un train démarre avec une accélération de 0,2 m/s^2. Il atteint alors la vitesse de 252 km/h. Après avoir roulé à cette vitesse pendant 40.0 minutes, Il freine avec une décélération de -0,3 m/s^2 jusqu'à l'arrêt. Quelle est la distance parcourue ?

   $\Delta r_{\text{tot}} = \text{km}\,\text{h}^{-1}$

Chapitre 9

Chute libre

Sommaire

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons discuter d'un cas particulier de MRUA [1] : la chute libre. Nous en rediscuterons dans le cadre de la dynamique sous un chapitre du même nom.

1 Chute d'objets dans l'atmosphère

Nous vivons à proximité de la surface de la Terre et dans son atmosphère. Cette dernière affecte la chute des corps matériels. La chute d'une feuille ou d'une plume seront différentes de la chute d'une grosse sphère métallique.

Les chutes de feuilles ou de plumes sont plus proches, en tout cas pour la plus grande partie du temps, d'un mouvement de type MRU. Nous discuterons ce type de chute dans le cadre de la dynamique quand nous parlerons des forces de frottements.

Les chutes d'objets denses et aérodynamiques sont proches d'un mouvement de type MRUA de direction verticale. Ce seront ces mouvements dont nous discuterons ici.

2 Chute libre

Galilée a réalisé une célèbre expérience en laissant tomber deux objets massifs mais différents du haut de la tour de Pise. Les deux objets arrivent au sol en même temps.

Si on fait le vide dans un tube enfermant des plumes et des objets massifs, lorsqu'on met le tube à la verticale ces objets tombent tous en MRUA. Les différents objets arriveront au fond du tube en même temps. Ce type de tube est appelé un "tube de Newton".

Les astronautes de la mission Apollo XV ont réalisé l'expérience à la surface de la Lune en laissant tomber une plume et un marteau dans le vide.

FIGURE 9.1 – Expérience de la plume et du marteau sur la Lune (Apollo XV - Juillet 1971).

Ce sont bien les effets dus à l'atmosphère qui "ralentissent" la plume.

A Définition

Nous dirons qu'un mouvement est une "chute libre" lorsqu'on peut négliger les effets de l'atmosphère dans la chute.

1. Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré

Définition 25 (chute libre)**.** Une *chute libre* est une chute à proximité de la surface de la Terre en absence d'effet du à l'atmosphère. Le mouvement sera un MRUA de direction verticale et de sens dirigé vers le centre de la Terre. L'accélération sera la même pour tout objet.

3 L'accélération de gravité sur Terre

Étudions une chronophotographie de chute libre.

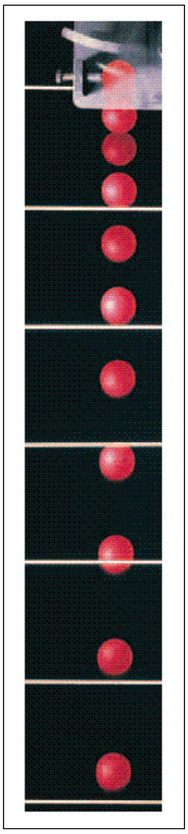


FIGURE 9.2 – Chute de bille sur la Terre (Novembre 2015).

Une analyse de cette chronophotographie produit les résultats suivants :

Analyse chute libre

*	t (s)	r (m)		t² (s²)	r (m)	a=2r/t² (m/s²)	*
	0	0,05		0	0,05		
	0,037	0,08		0,001369	0,08	43,8276113952	
	0,072	0,11		0,005184	0,11	23,1481481481	
	0,108	0,14		0,011664	0,14	15,4320987654	
	0,144	0,18		0,020736	0,18	12,5385802469	
	0,18	0,23		0,0324	0,23	11,1111111111	
	0,216	0,29		0,046656	0,29	10,2880658436	
	0,252	0,355		0,063504	0,355	9,6056941295	
	0,288	0,44		0,082944	0,44	9,4039351852	
	0,324	0,6		0,104976	0,6	10,4785855815	

(selon chronophotographie)

FIGURE 9.3 – Analyse de la chute de bille sur la Terre (Novembre 2015).

Remarque 4 (Choix d'axe en chute libre). Nous avons fait un choix d'axe de direction verticale et où le sens positif était vers le bas.

La valeur de l'accélération déterminée expérimentalement est aux alentours de $10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Définition 26 (Accélération de pesanteur)**.** En chute libre, la valeur de l'accélération est de $9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Son symbole est **g**. On dit que **g** est l'accélération de pesanteur (terrestre).

"g" varie légèrement selon la latitude (à l'équateur $9{,}78\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, aux pôles $9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$) et l'altitude. La valeur de "g" est différente sur d'autres astres. Nous en rediscuterons.

4 Choix d'axes pour résoudre des problèmes

Selon le type de problème à résoudre, un choix correct d'axe peut grandement faciliter la tâche. Il faudra cependant alors être attentif au *signe* de "g" qui pourra être positif ou négatif selon le choix qui est fait.

Les différents choix discutés ici sont simplement différentes manières de représenter une même situation. Les objets tomberont toujours de la même manière. Mais les équations pour décrire ces mouvements seront différentes. Un choix correct produit des équations plus simples à résoudre.

A Pure chute

Si le point de départ de la chute est connu, il est plus commode de diriger le sens de l'axe vertical vers le bas. Alors "g" est de signe *positif.*

On peut choisir le niveau du sol comme origine du système. On aussi peut choisir le point de départ comme origine du système. (C'est ce que nous avons fait pour la chronophotographie puisque l'arrivée au sol ne nous intéressait pas.)

B Lancer vers le haut

Lors de lancer d'objets vers le haut, le point le plus élevé de la trajectoire n'est pas nécessairement connu. Dans ce type de situation, il vaut mieux fixer l'origine du système au sol et orienter l'axe vers le haut. Alors "g" est de signe *négatif*.

5 Exercices

Sauf mention contraire, faire les exercices en prenant une valeur de "g" de $10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

1. On laisse tomber des colis de vivres de 80 m de haut. La descente au sol est considérée comme une chute libre.
   (a) Quelle est la durée de la chute ?
   t = 4 s
   (b) Quelle est la vitesse des colis en arrivant au sol ?
   v = $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (= $144\,\mathrm{km\,h^{-1}}$)
2. On lance un poids en métal vers le haut avec une vitesse de $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
   (a) Après combien de temps reviendra t' il au sol ?
   2 X le temps de monter ! C'est-à-dire 2× 2 s = 4 s
   (b) À quelle hauteur (max.) va t' il monter ?
   20 m
3. Dans la dernière seconde de sa chute un corps parcourt 10 m . De quelle hauteur est-il tombé au total ?
   11,25 m
4. Pour calculer la profondeur d'un puit, un physicien laisse tomber un baromètre dans le puit. Il entend "plouf" 3 secondes plus tard. Sachant que la vitesse du son dans l'air est de 340 $\mathrm{m\,s^{-1}}$, déterminez la profondeur du puit.

Troisième partie

Cinématique dans l'espace

Chapitre 10

MCU

Sommaire

Introduction

Il va s'agir, ici, de décrire le mouvement d'un mobile ponctuel en rotation régulière.
Les exemples typiques sont :

- le mouvement d'une feuille de salade dans une essoreuse,
- celui de la pipette d'une roue de vélo lorsqu'on fait tourner la roue pour détecter une fuite,
- un objet dans une centrifugeuse,
- une pierre dans une fronde,
- une voiture dans un tournant,
- un enfant sur un carrousel,
- une planète en orbite autour du soleil,
- et en général un satellite (naturel ou artificiel) en orbite autour d'un astre.

1 mouvement circulaire uniforme

Introduisons ici des notations particulières à notre question.

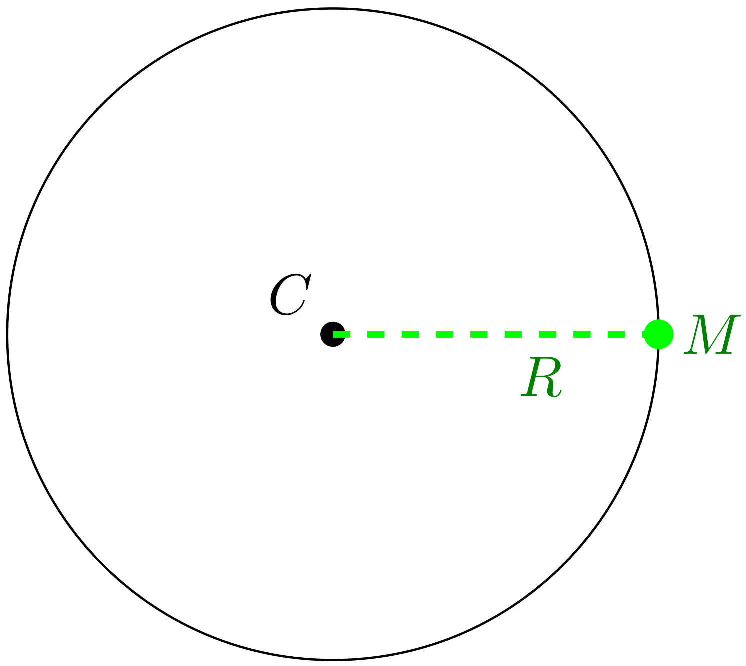


FIGURE 10.1 – L'objet M est en rotation autour de C à une distance R de C.

* Un objet de masse m
* en mouvement circulaire uniforme
  * de rayon R (m)
  * et de centre C
  * décrit des arcs Δs (m)
  * en des durées égales Δt. (s)
* La durée d'une révolution complète est la période T (s)

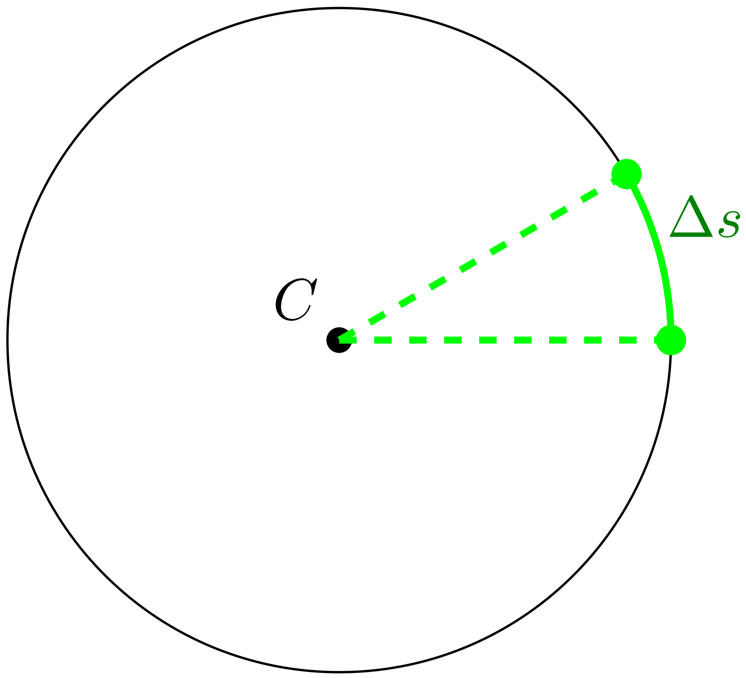


FIGURE 10.2 – L'objet M parcourt un arc de cercle Δs.

Remarque 5. La position sur la circonférence est repérée par la grandeur s. "s" est une abscisse curviligne.

Exemples de périodes :

* Ex : L'aiguille des secondes d'un horloge est en MCU et a une période T de $60s$.
* Ex : L'aiguille des minutes d'un horloge a une période T de ......
* Ex : L'aiguille des heures d'un horloge a une période T de ......

2 Vitesse linéaire et vitesse angulaire

A Vitesse linéaire

En MCU, la vitesse v est égale à la longueur d'arc de cercle parcourue par unité de temps. Càd.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

où

— Δt est la durée nécessaire (s)
— pour parcourir
— Δs la longueur d'arc (m).

Attention : Rappel le sens positif est le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Pour un tour (une circonférence) : $\Delta s = 2\pi R$ et $\Delta t = T$
Et donc :

Définition 27 (norme de la vitesse linéaire en MCU)**.**

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{10.1}$$

où

— T = la durée d'une révolution complète ou période (s),
— R = le rayon de la circonférence parcourue (m).

a) Exemple :

L'horloge de l'hôtel de ville a une trotteuse qui fait exactement 1m de long. Quelle est la vitesse v de la pointe de la trotteuse ?

* Données :
  * $R = 1m$
  * $T = 60s$
* Inconnue :
  * $v = ?(m/s)$
* Formule :
  * $v = \frac{2\pi R}{T}$
* Solution :
  * $v = \frac{2\pi 1}{60}(m/s)$
  * $v = \frac{6{,}28}{60}(m/s)$
  * $v = 0.1(m/s)$

b) Caractéristiques du vecteur vitesse

Rappelons que les caractéristiques d'un vecteur sont :

* sa direction,
* son sens,
* sa grandeur et
* son point d'application.

Dans un chapitre précédent, nous avons vu qu'en tout point de la trajectoire, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire.

Ici, dans un mouvement circulaire, la trajectoire est la circonférence du cercle. Si $\vec{v}$ est tangent à la circonférence du cercle, alors $\vec{v}$ est perpendiculaire au rayon R.

$$\vec{v} \perp R$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est dans le sens du mouvement. La grandeur de $\vec{v}$ est v. Son point d'application est le centre de masse du mobile en mouvement sur la circonférence.

Et donc, les caractéristiques du vecteur $\vec{v}$ sont :

* sa direction : $\vec{v} \perp R$
* son sens : le sens du mouvement
* sa grandeur : $v = \frac{2\pi R}{T}$
* son point d'application : le centre de masse du mobile désigné par P.

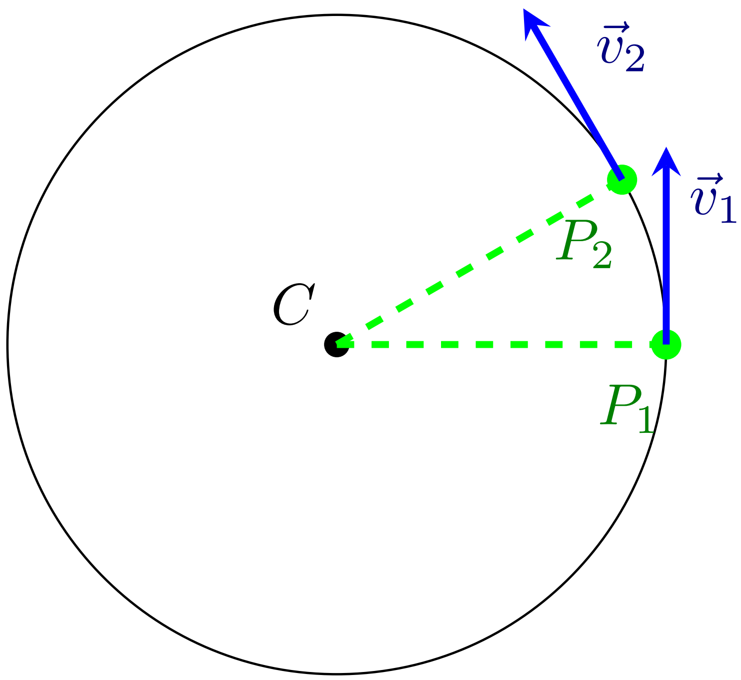


FIGURE 10.3 – Les vecteurs vitesses sont de même grandeur et perpendiculaires aux rayons.

B Vitesse angulaire

La vitesse $\vec{v}$ mesure le déplacement (m). Il peut être utile de mesurer la vitesse angulaire. La vitesse angulaire est liée à la période et au "nombre de tours" par seconde. Elle est une mesure de l'angle fait par unité de temps. Plutôt que de mesurer l'angle en degré, par convention, elle est donnée en "radians par seconde".

Définition 28 (Vitesse angulaire)**.** La vitesse angulaire ω est l'angle balayé par unité de temps.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

où :
— ω = la vitesse angulaire ($\mathrm{rad\,s^{-1}}$)
— T = la période ($\mathrm{s^{-1}}$)

3 L'accélération en MCU

A L'accélération centripète

La vitesse v est certes constante, mais nous ne sommes plus en MRU. Le vecteur $\vec{v}$ est bien de grandeur v constante MAIS la **direction** du vecteur $\vec{v}$ change continuellement. Notons que ce changement est régulier, nous y reviendrons.

Rapelons la définition de l'accélération vectorielle !

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

a) Différence de vitesses vectorielles

Ce changement de vitesse $\Delta\vec{v}$ est une différence de vitesse.

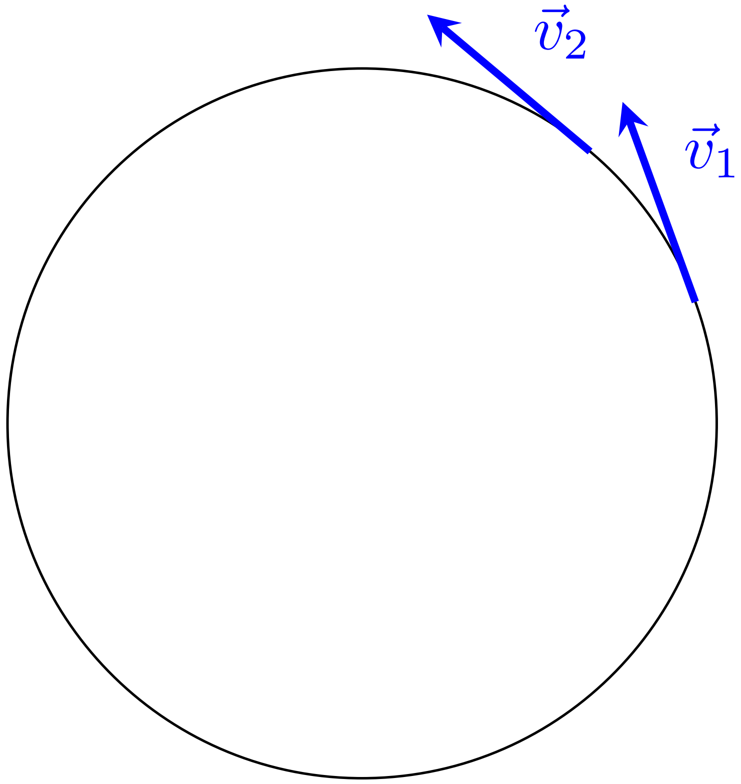


FIGURE 10.4 – Les vecteurs vitesses à deux instants t_1 et t_2.

En MRU, nous faisions $\Delta v = v_2 - v_1$, ici, avec des grandeurs vectorielles nous faisons

$$\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$$

Faire une différence de vecteurs revient à additionner un vecteur $\vec{v_2}$ et l'opposé de $\vec{v_1}$.

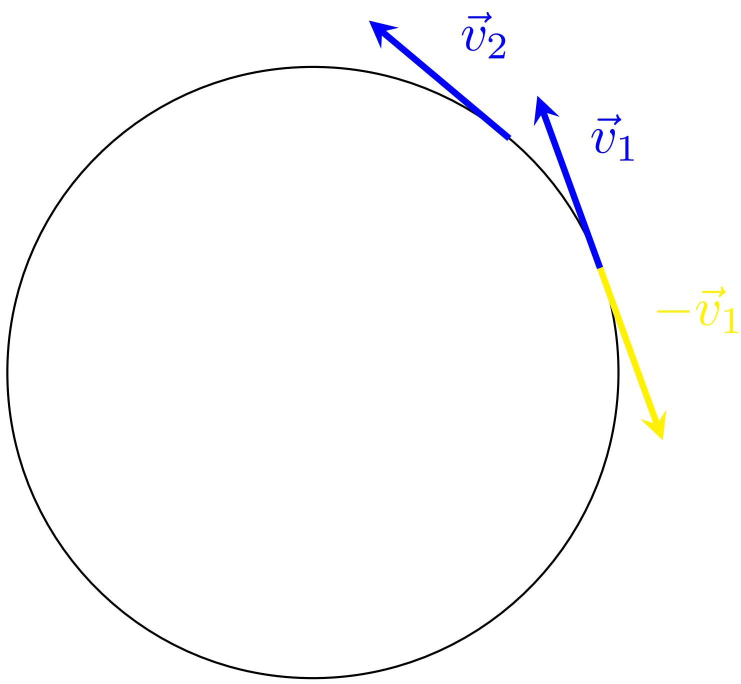


FIGURE 10.5 – Soustraire un vecteur : somme d'un vecteur et de l'opposé de l'autre.

Comme nous pouvons déplacer un vecteur pour faire la différence, nous avons maintenant :

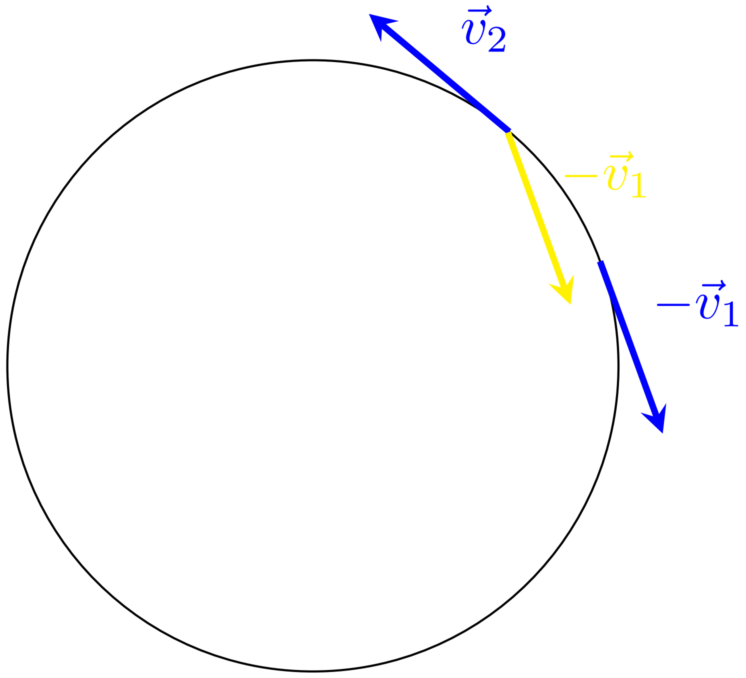


FIGURE 10.6 – Les vecteurs vitesses comme vecteurs libres.

Remarque : Le vecteur $\Delta\vec{v}$ ne pointe pas parfaitement vers le centre car souvenons-nous que les définitions de la vitesse et de l'accélération impliquent de prendre Δt petit. Ce qui n'est pas le cas dans les illustrations précédentes.

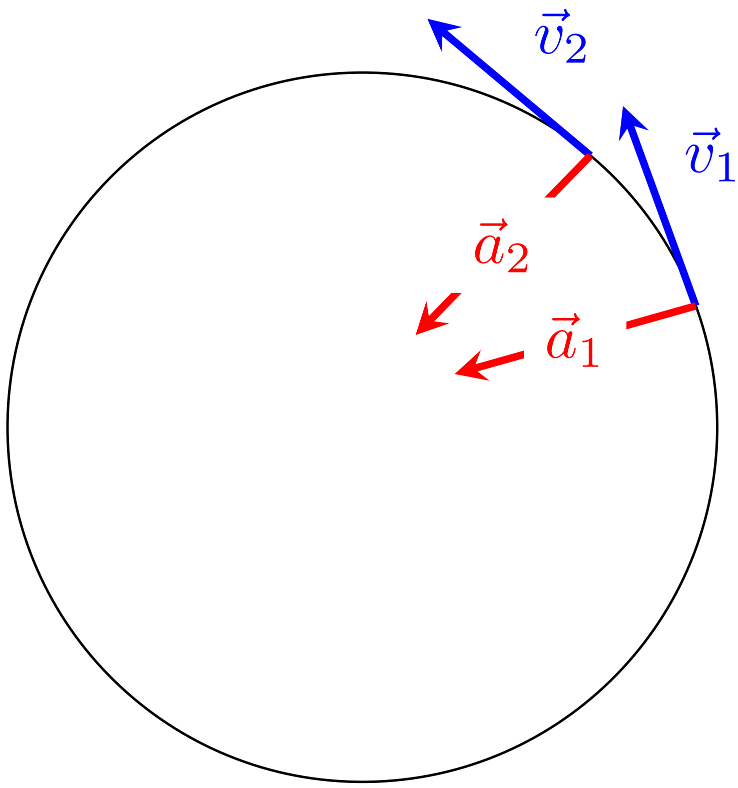


FIGURE 10.7 – Les vecteurs accélérations.

Conclusion

$\Delta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} + (-\overrightarrow{v_1})$ est donc bien dirigé vers le centre et que l'accélération $\overrightarrow{a}$ sera aussi dirigée vers le centre. L'accélération $\overrightarrow{a}$ est donc bien centripète.

B Grandeur de l'accélération centripète

introduction

Nous connaissons maintenant

* le point d'application (le point P : centre de masse de l'objet de masse m)
* la direction (selon une droite reliant le centre C et le point P) et
* le sens (pointant vers le centre C)

de l' accélération centripète.

Mais nous ne connaissons pas encore la grandeur (ou norme) de l'accélération en MCU. Étudions ici cette question.

a) Équations du mouvement : position

Sans beaucoup insister, nous avons défini la position du mobile en coordonnées polaires. Le vecteur position $\overrightarrow{r(t)}$ est défini par un angle θ et et la longueur R du vecteur.

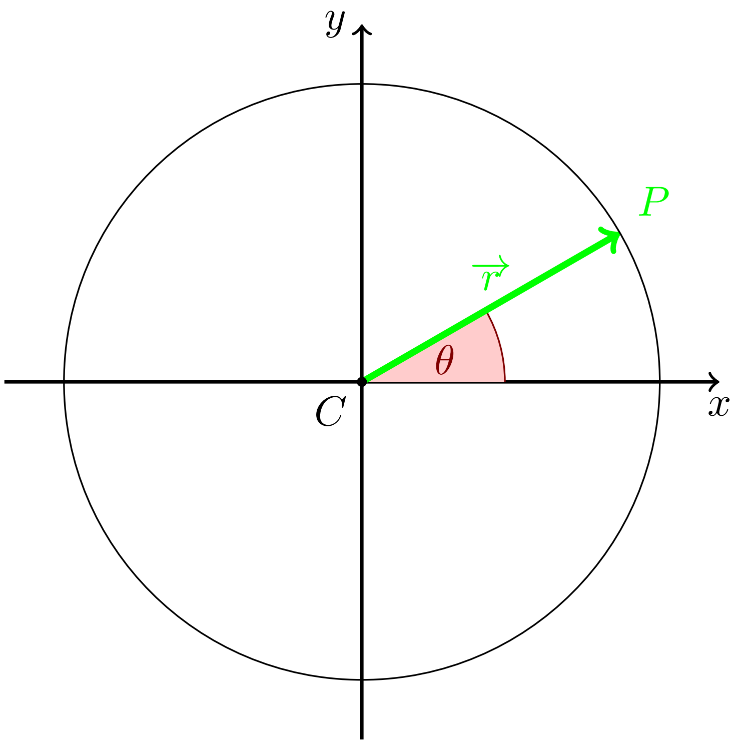


FIGURE 10.8 – La position de P en coordonnées polaires : $P(\theta, R)$.

Nous savons que notre mobile M se déplace à une vitesse linéaire constante et donc à une vitesse angulaire constante.

L'angle θ indiquant la position de M sur la circonférence est déterminé par la vitesse angulaire via la relation suivante :

$$\theta = \omega \cdot t \tag{10.2}$$

Exprimons maintenant la position de notre mobile en fonction du temps dans un système de référence cartésien dont l'origine est le centre de rotation.

Le vecteur position $\overrightarrow{r}(t)$ peut être vu comme la somme de deux vecteurs orientés selon les axes du système cartésien : $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_x}(t) + \overrightarrow{r_y}(t)$

Les normes des composantes de $\overrightarrow{r}(t)$ sont liées à R et ω par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r_x = R \cdot \cos(\omega t) \\ r_y = R \cdot \sin(\omega t) \end{cases} \tag{10.3}$$

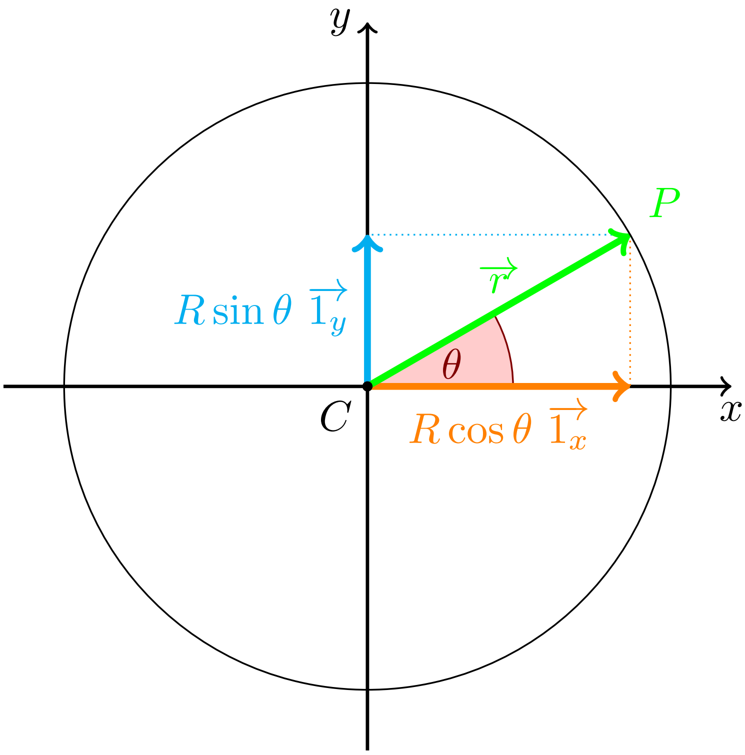


FIGURE 10.9 – La position de P en coordonnées cartésiennes : $P(r_x, r_y)$.

Les équations 10.3 nous fournissent les coordonnées du point P où se trouve le mobile M mais aussi les composantes du vecteur position $\overrightarrow{r(t)}$ en fonction du temps.

Les équations 10.3 rendent bien compte de la position de M.

En effet :

— la norme de $\overrightarrow{r(t)}$ est égale à $\sqrt{r_x^2 + r_y^2}$
$= \sqrt{R^2 \cdot \cos^2(\omega t) + R^2 \cdot \sin^2(\omega t)} = R\sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = R$;

— et donc la distance de M au centre de rotation est constante et vaut R ;

— De plus $t = T$, alors $\omega t = \omega T = \frac{2\pi}{T} T = 2\pi$;

— et nous avons $\cos(\omega t) = \cos(2\pi) = 1$ et $\sin(\omega t) = \sin(2\pi) = O$.

b) Équations du mouvement : vitesse

Nous avons vu dans l'équation 4.4 (page 41)
que le vecteur vitesse s'obtient comme la dérivée du vecteur position.
Dérivons donc par rapport au temps le vecteur position obtenu par les équations 10.3.

$$\begin{cases} r'_x = (R \cdot \cos(\omega t))' = -R\omega \sin(\omega t) \\ r'_y = (R \cdot \sin(\omega t))' = R\omega \cos(\omega t) \end{cases} \tag{10.4}$$

Les composantes du vecteur vitesse sont donc :

$$\begin{cases} v_x = -R\omega \sin(\omega t) \\ v_y = R\omega \cos(\omega t) \end{cases} \tag{10.5}$$

Ici aussi, ces équations sont cohérentes avec les résultats précédents : La norme de $v(t) = R\omega$ et un schéma peut nous convaincre que la direction du vecteur est correcte.

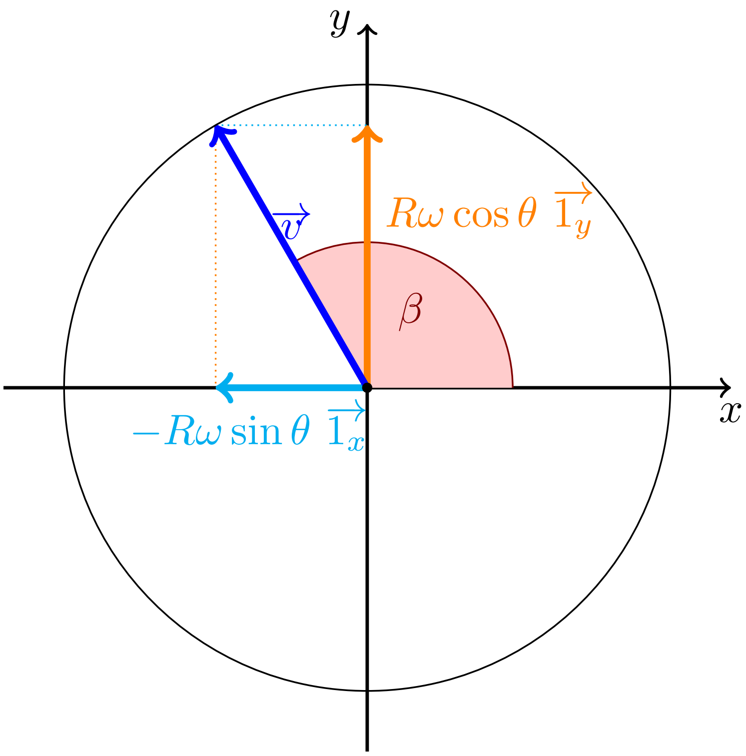


FIGURE 10.10 – Le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes.

En effet l'angle β que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale est l' anti-complémentaire de l'angle formé par le vecteur position avec l'horizontale : le cosinus de β est égal à moins le sinus de θ et le sinus de β est égal au cosinus de θ. Le vecteur vitesse fait bien un angle droit avec le rayon. Si nous plaçons le vecteur vitesse en P, nous retrouvons le vecteur v tangent au cercle. [1]

c) Équations du mouvement : accélération

Si le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position, nous avons aussi vu (voir éq. 7.4 p. 59) que le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse.

Appliquons ce résultat à notre cas.

$$\begin{cases} a_x = v'_x = (-R\omega \sin(\omega t))' = -R\omega^2 cos(\omega t) \\ a_y = v'_y = (R\omega \cos(\omega t))' = -R\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \tag{10.6}$$

Et donc en MCU :

$$\begin{cases} a_x = -R\omega^2 \cos(\omega t) \\ a_y = -R\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \tag{10.7}$$

1. Pour simplifier les schémas nous avons pris un vecteur vitesse de même longueur que le vecteur $\overrightarrow{r}$.

Observons de suite que nous obtenons la valeur de la norme de $\overrightarrow{a(t)}$: $R\omega^2$.

Mais aussi les deux composantes sont affublées d'un signe moins. Ceci est cohérent avec le fait que l'accélération est *centripète* en MCU !

C Résumé

Nous connaissons donc maintenant toutes les caractéristiques du vecteur accélération $\overrightarrow{a(t)}$ en MCU.

Résumons les ici et déterminons ainsi complètement le vecteur accélération en MCU :

Définition 29 (accélération en MCU)**.** En MCU, l'accélération $\overrightarrow{a(t)}$ a les caractéristiques suivantes :
- sa norme est $a = R\omega^2$. $(\mathrm{m\,s^{-2}})$;
- sa direction est selon le rayon R ;
- son sens est dirigé vers le centre C de rotation (centripète).

4 Exercices :

1. La circonférence de la Terre est approximativement de 40 000 km et elle effectue un tour sur elle-même en approximativement 24h. Quelle est la vitesse v de quelqu'un se trouvant à l'équateur ?
   * Données :
     * $Circ \approx 40000km = 4 \times 10^7\,\mathrm{m}$
     * $T \approx 24h = 86\,400\,\mathrm{s}$
   * Inconnue :
     * $v = ?(m/s)$
   * Formule :
     * $Circ = 2\pi R$
     * $v = \frac{2\pi R}{T}$
     * $v = \frac{Circ}{T}$
   * Solution :
     * $v = \frac{Circ}{T}$
     * $v = \frac{4\cdot 10^7}{86400}(m/s)$
     * $v \simeq 462,9(m/s)$
2. La Terre tourne autour du soleil en approximativement 365 jours. La lumière met approximativement 8 minutes pour parcourir la distance entre la Terre et le Soleil. Sachant que la vitesse de la lumière est approximativement 300 000 km/s, quelle est la vitesse v de la Terre dans son mouvement orbital autour du Soleil ?
3. La Lune tourne autour de la Terre en approximativement 28 jours. La lumière met approximativement 1 seconde pour parcourir la distance entre la Terre et la Lune. Sachant que la vitesse de la lumière est approximativement 300 000 km/s, quelle est la vitesse v de la Lune dans son mouvement orbital autour de la Terre ?
4. On fait tourner un poids de $1kg$ attaché à une corde de longueur $= 2m$, un tour est fait en $4s$. Quelle est la valeur de v.
5. Valeurs de ω et de a pour tous les problèmes précédents.

Chapitre 11

MCUA

Sommaire

Introduction

Nous allons élaborer ici sur les raisonnements faits au chapitre consacré au MCU.

1 Hypothèses de départ

Au lieu d'avoir une rotation régulière (et donc une vitesse angulaire constante) nous allons avoir une vitesse angulaire qui augmente régulièrement avec le temps. Supposons aussi que l'objet est initialement au repos.

Par ailleurs, l'objet M est toujours à une distance fixe R d'un centre C.

A ω croissant et accélération angulaire

Soit

$$\alpha(t) = \alpha (= \text{cst.}) \tag{11.1}$$

où :
— $\alpha(t)$ est l'accélération *angulaire* instantanée ($\text{rad}\,\text{s}^{-2}$) ;
— elle est, dans tout le chapitre, constante càd. indépendante du temps.

Nous allons avoir une vitesse angulaire augmentant régulièrement avec le temps.

$$\omega(t) = \alpha \cdot t \tag{11.2}$$

où :
— $\omega(t)$ est la vitesse angulaire *dépendante* du temps ($\text{rad}\,\text{s}^{-1}$),
— t est la durée écoulée depuis le début du mouvement (s),
— α est une accélération *angulaire* ici indépendante du temps ($\text{rad}\,\text{s}^{-2}$).

L'angle θ indiquant la position de M sur la circonférence est déterminé par la vitesse angulaire.

Par analogie avec le MRUA, nous pouvons utiliser un argument d'intégration et alors écrire :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \tag{11.3}$$

où :
— $\theta(t)$ est l'angle donnant la direction (et le sens) du vecteur position (rad).

Nous ne pourrons plus parler de période "T" puisque la valeur de l'angle n'augmente plus linéairement avec le temps mais comme le carré de celui-ci.

a) Vitesse angulaire initiale

Nous allons, dans un premier temps, traiter la question du MCUA sans vitesse angulaire initiale. Ceci afin d'alléger les notations. Nous traiterons le cas général avec vitesse angulaire initiale plus tard.

Écrivons cependant déjà ici les équations angulaires dans le cas général du MCUA. En effet, certains choix d'écriture faits plus loin se justifient par le cas général.

Nous ne légendons que les nouvelles grandeurs qui apparaissent ici.

$$\alpha(t) = \alpha (= \text{cst.}) \tag{11.4}$$

$$\omega(t) = \alpha \cdot t + \omega_0 \tag{11.5}$$

où :
— ω_0 est la vitesse angulaire *initiale* ($\mathrm{rad\,s^{-1}}$).

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \theta_0 \tag{11.6}$$

où :
— θ_0 est l'angle initial du vecteur position (rad),

2 Équations du mouvement

En imitant la démarche que nous avions adoptée pour le MCU, étudions maintenant les différentes grandeurs du mouvement : les vecteurs position, vitesse et accélération.

A Le vecteur position

En coordonnées polaires, le vecteur position $\overrightarrow{r(t)}$ est toujours défini par un angle θ et la longueur R du vecteur.

Nous savons aussi que le vecteur position $\overrightarrow{r}(t)$ peut être vu comme la somme de deux vecteurs orientés selon les axes du système cartésien : $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_x}(t) + \overrightarrow{r_y}(t)$

Les normes des composantes de $\overrightarrow{r}(t)$ sont liées à R et ω par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r_x = R \cdot \cos(\frac{1}{2}\alpha t^2) \\ r_y = R \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha t^2) \end{cases} \tag{11.7}$$

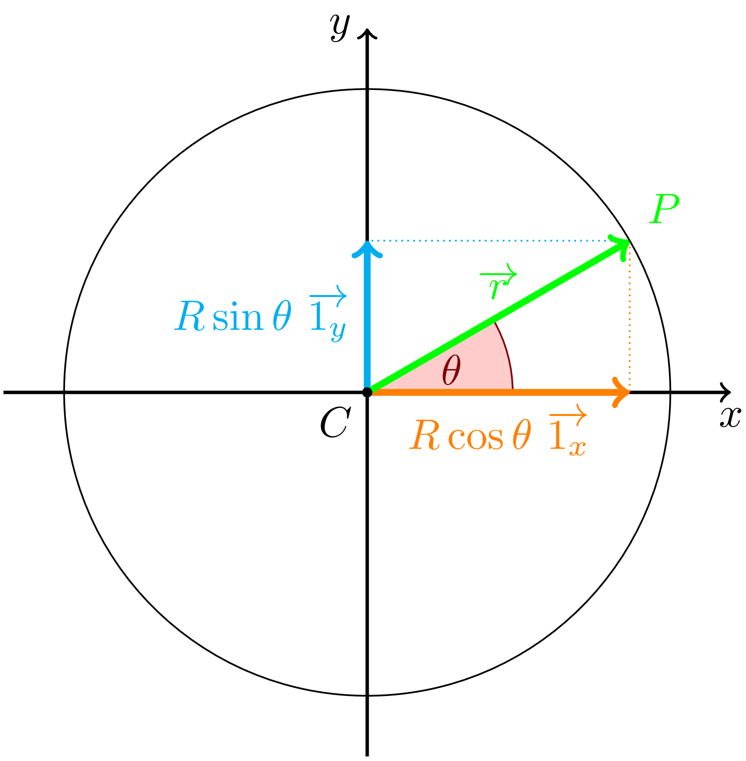


FIGURE 11.1 – La position de P en coordonnées cartésiennes : $P(r_x, r_y)$.

Les équations 11.7 nous fournissent les coordonnées du point P où se trouve le mobile M mais aussi les composantes du vecteur position $\overrightarrow{r(t)}$ en fonction du temps.

Les équations 11.7 rendent comptent de la position de M.

— la norme de $\overrightarrow{r(t)}$ est égale à $\sqrt{r_x^2 + r_y^2}$
$= \sqrt{R^2 \cdot \cos^2(\frac{1}{2}\alpha t^2) + R^2 \cdot \sin^2(\frac{1}{2}\alpha t^2)} = R\sqrt{\cos^2(\frac{1}{2}\alpha t^2) + \sin^2(\frac{1}{2}\alpha t^2)} = R$;

— et donc la distance de M au centre de rotation est constante et vaut R ;

B Le vecteur vitesse

Nous avons vu dans l'équation 4.4 (page 41)
que le vecteur vitesse s'obtient comme la dérivée du vecteur position.
Dérivons donc par rapport au temps le vecteur position obtenu par les équations 11.7.

$$\begin{cases} r'_x = (R \cdot \cos(\frac{1}{2}\alpha t^2))' = -2R\frac{1}{2}\alpha t \sin(\frac{1}{2}\alpha t^2) \\ r'_y = (R \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha t^2))' = 2R\frac{1}{2}\alpha t \cos(\frac{1}{2}\alpha t^2) \end{cases} \tag{11.8}$$

Les composantes du vecteur vitesse sont donc :

$$\begin{cases} v_x = -R\alpha t \sin(\frac{1}{2}\alpha t^2) \\ v_y = R\alpha t \cos(\frac{1}{2}\alpha t^2) \end{cases} \tag{11.9}$$

La norme de $v(t) = R\alpha t$

$$v(t) = R\alpha t \tag{11.10}$$

La direction du vecteur est toujours tangente à la trajectoire.

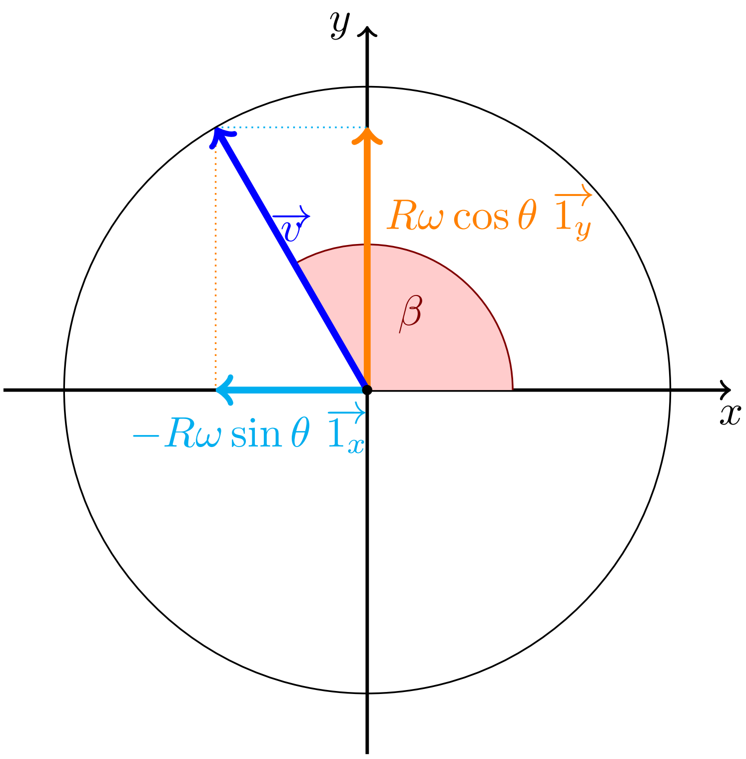


FIGURE 11.2 – Le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes.

En effet l'angle β que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale est l' anti-complémentaire de l'angle formé par le vecteur position avec l'horizontale : le cosinus de β est égal à moins le sinus de

θ et le sinus de β est égal au cosinus de θ. Le vecteur vitesse fait bien un angle droit avec le rayon. Si nous plaçons le vecteur vitesse en P, nous retrouvons le vecteur v tangent au cercle. [1]

C le vecteur accélération

Nous savons (voir éq. 7.4 p. 59) que le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse. Appliquons ce résultat à notre cas.

$$\begin{cases} a_x = v'_x = (-R\alpha t \sin(\frac{1}{2}\alpha t^2))' \\ a_y = v'_y = (R\alpha t \cos(\frac{1}{2}\alpha t^2))' \end{cases} \tag{11.11}$$

Et donc en MCUA :

$$\begin{cases} a_x = -R\alpha \sin(\frac{1}{2}\alpha t^2) - Rt^2\alpha^2 \cos(\frac{1}{2}\alpha t^2) \\ a_y = R\alpha \cos(\frac{1}{2}\alpha t^2) - Rt^2\alpha^2 \sin(\frac{1}{2}\alpha t^2) \end{cases} \tag{11.12}$$

Cette expression est plus complexe que celle du MCU (voir éq. 10.7 p. 86) .

a) Accélérations normale et tangentielle

(i) Accélération tangentielle : Observons tout d'abord que nous avons la partie de l'accélération en "$R\alpha$" a une composante en"x" en "$-\sin(\frac{1}{2}\alpha t^2)$ et une composante en "y" en "$\cos(\frac{1}{2}\alpha t^2)$".
Cette partie de l'accélération est donc alignée comme le vecteur vitesse.
Il s'agit de l'accélération tangentielle discutée précédemment
Sa norme sera donc :

$$\|\vec{a}_{tg.}\| = \sqrt{a_{tg.x}^2 + a_{tg.y}^2} \tag{11.13}$$

Comme nous en avons l'habitude nous écrirons la norme du vecteur en n'écrivant pas la flèche du vecteur.

$$a_{tg.} = \|\vec{a}_{tg.}\| \tag{11.14}$$

$$a_{tg.} = \sqrt{R^2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos^2(\frac{1}{2}\alpha t^2) + R^2 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2(\frac{1}{2}\alpha t^2)} \tag{11.15}$$

$$a_{tg.} = R\alpha\sqrt{\cos^2(\frac{1}{2}\alpha t^2) + \sin^2(\frac{1}{2}\alpha t^2)} \tag{11.16}$$

Donc :

$$a_{tg.} = R\alpha \tag{11.17}$$

(ii) Accélération normale : La partie de l'accélération en "$Rt^2\alpha^2$" a une composante en"x" en "$-\cos(\frac{1}{2}\alpha t^2)$ et une composante en "y" en "$-\sin(\frac{1}{2}\alpha t^2)$".
Cette partie de l'accélération est donc de même direction que le vecteur position mais de sens opposé.
Il s'agit de l'accélération normale discutée précédemment
Sa norme sera donc :

$$a_{n.} = \sqrt{a_{n.x}^2 + a_{n.y}^2} \tag{11.18}$$

1. Pour simplifier les schémas nous avons pris un vecteur vitesse de même longueur que le vecteur $\vec{r}$.

$$a_{n.} = \sqrt{R^2 t^4 \alpha^4 \cos^2(\frac{1}{2}\alpha t^2) + R^2 t^4 \alpha^4 \sin^2(\frac{1}{2}\alpha t^2)} \tag{11.19}$$

$$a_{n.} = R t^2 \alpha^2 \sqrt{\sin^2(\frac{1}{2}\alpha t^2) + \cos^2(\frac{1}{2}\alpha t^2)} \tag{11.20}$$

Et donc :

$$a_{n.} = R t^2 \alpha^2 \tag{11.21}$$

b) Norme de l'accélération

Comme l'accélération normale et tangentielle sont perpendiculaires, il est très facile de déterminer la norme de $\overrightarrow{a}$.

$$\|\overrightarrow{a}(t)\| = \sqrt{a_n^2 + a_{tg.}^2} = \sqrt{R^2 t^4 \alpha^4 + R^2 \alpha^2} \tag{11.22}$$

$$\|\overrightarrow{a}(t)\| = R\sqrt{t^4 \alpha^4 + \alpha^2} \tag{11.23}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\|\overrightarrow{a}(t)\| = R\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \tag{11.24}$$

Il aurait été tentant de mettre α en évidence dans l'équation 11.23.

Remarquons cependant que si la vitesse angulaire initiale n'avait pas été nulle, alors on aurait eu

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0 \tag{11.25}$$

C'est pourquoi on préfère la forme de l'équation 11.24 à la précédente.

c) Direction de l'accélération

La direction du vecteur accélération peut se déterminer par le raisonnement suivant :
Soit θ_a l'angle formé par le vecteur $\overrightarrow{a}$ et l'horizontale.
Soit θ_v l'angle formé par le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ et l'horizontale.

$$\theta_v = \omega t + \pi/2 \tag{11.26}$$

La partie tangentielle de l'accélération forme donc aussi le même angle θ_v avec l'horizontale.

θ_a est donc égal à l'angle θ_v auquel il faut ajouter l'angle φ entre $\overrightarrow{a}$ et l'accélération tangentielle $\overrightarrow{a}_{tg.}$.

$$\theta_a = \theta_v + \varphi \tag{11.27}$$

$$\theta_a = \omega t + \pi/2 + \varphi \tag{11.28}$$

$$\varphi = \arctan\frac{a_n}{a_{tg.}} = \arctan\frac{R t^2 \alpha^2}{R\alpha} = \arctan(\frac{t^2\alpha^2}{\alpha}) = \arctan(\frac{t\omega^2}{\alpha}) \tag{11.29}$$

Finalement on obtient donc :

$$\theta_a = \omega t + \arctan(\frac{t\omega^2}{\alpha}) + \pi/2 \tag{11.30}$$

C'est-à-dire dans le cas qui nous occupe :

$$\theta_a = \omega t + \arctan(\frac{t^2 \alpha^2}{\alpha}) + \pi/2 \tag{11.31}$$

Un raisonnement simple va nous permettre de comprendre cette expression.

À l'instant initial, il faut "démarrer" le mobile M. L'accélération sera uniquement tangentielle. Cette accélération tangentielle reste constante (dans le cadre que nous nous sommes donné).

Plus la vitesse linéaire augmente, plus l'accélération normale doit être grande (comme dans le MCU).

Le vecteur accélération va donc devenir de plus en plus centripète au fur et à mesure du temps sans jamais tout à fait le devenir à cause de l'accélération tangentielle qui reflète l'augmentation de vitesse.

d) En résumé

Nous connaissons donc maintenant toutes les caractéristiques du vecteur accélération $\overrightarrow{a(t)}$ en MCUA.

Résumons les ici et déterminons ainsi complètement le vecteur accélération en MCUA :

Définition 30 (accélération en MCUA)**.** En MCUA, l'accélération $\overrightarrow{a(t)}$ a les caractéristiques suivantes :
— sa norme est $\|\vec{a}(t)\| = a = R\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$. $(\text{m}\,\text{s}^{-2})$;
— sa direction est donnée par $\theta_a = \omega t + \arctan(\frac{t\omega^2}{\alpha})2 + \pi/2$;
— son sens est dirigé vers l'intérieur du cercle (mais plus vers le centre).

Remarque 6. Notons que si l'accélération angulaire α est constante, ce n'est pas le cas du vecteur accélération $\overrightarrow{a(t)}$. Sa norme augmente avec le temps et sa direction évolue de manière non triviale avec le temps.

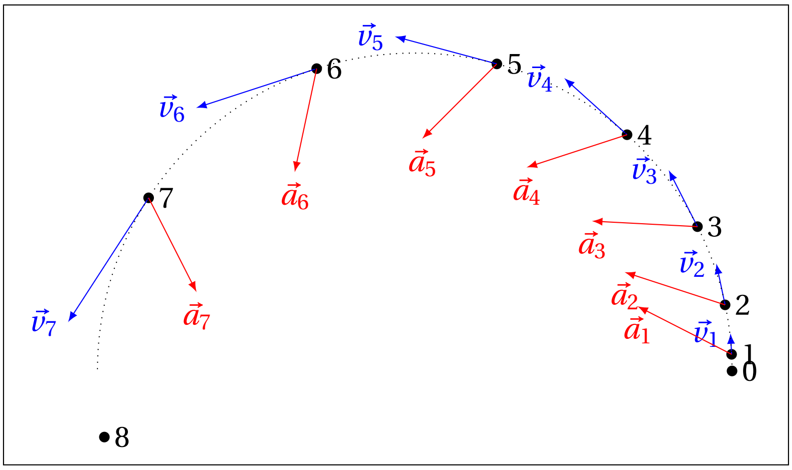


FIGURE 11.3 – L'accélération linéaire en MCUA.

3 Exercices :

Chapitre 12

Le tir horizontal

Sommaire

Introduction

Le tir horizontal est le mouvement d'un objet à proximité de la surface de la Terre (ou d'une planète) et qui, au départ, n'a qu'une vitesse horizontale. Comme pour la chute libre, les effets de l'atmosphère peuvent être négligés.

Exemples

— Si nous lâchons une balle, nous savons que le mouvement sera une chute libre en MRUA. Si, maintenant, nous sommes dans un train en marche et désirons laisser tomber une balle dans un seau posé sur le quai, nous savons que nous ne devons pas laisser tomber la balle à la verticale du seau mais "avant". Une personne se trouvant sur le quai verra la balle tomber selon une trajectoire courbée et pas à la verticale. Si nous sommes dans le train, comment nous apparaît la trajectoire ?

— Si maintenant, nous sommes sur un pont et désirons laisser tomber une balle dans un seau ... posé sur le toit du train ! Qu'allons nous faire ? Quelle sera l'apparence de la trajectoire si nous sommes dans le train ou sur le pont ?

La notion de système de référence, rappelée aux chapitres précédents, prend clairement beaucoup d'importance dans ces exemples. Les courbes ne seront pas les mêmes selon l'endroit où se trouve l'observateur : Si vous êtes sur le pont la balle tombe tout droit (en MRUA), si vous êtes sur le train la trajectoire est courbe. Pourtant, c'est la même balle qui tombe et elle prend autant de temps pour tomber quelque soit l'endroit où se trouve l'observateur. En y réfléchissant, est-ce si différent dans le premier exemple ?

1 Mise en situation

A Expérience

FIGURE 12.1 – Deux pièces, une latte, un axe sur une table.

Disposons deux pièces identiques en équilibre au bord d'une table. Ensuite nous faisons pivoter, à la surface de la table, une latte autour d'un axe (un bic ou un crayon) pour que la latte frappe les deux pièces simultanément.

Les deux pièces vont tomber en même temps. La pièce la plus proche de l'axe, ayant reçu la plus petite impulsion, va tomber presque au pied de la table. L'autre pièce va tomber plus loin.

FIGURE 12.2 – Les deux pièces vont tomber.

Conclusion 1. *Mais les deux pièces arrivent au sol en même temps !*

B Autres exemples

a) Dans le train

Si, dans un train en MRU, nous laissons tomber un objet, cet objet va tomber à nos pied. Tout se passe, de notre point de vue, comme si l'objet était en chute libre.

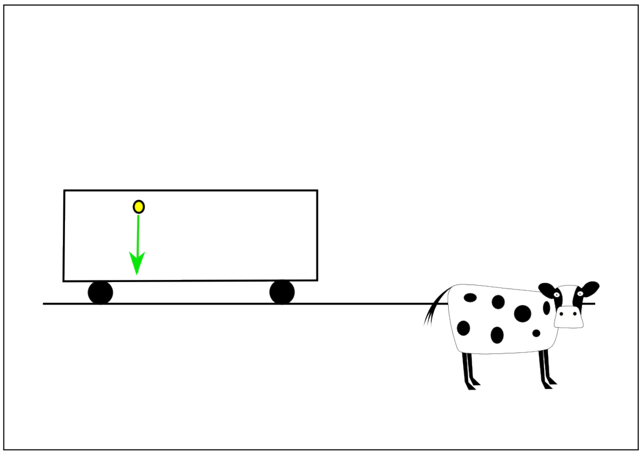


FIGURE 12.3 – Chute dans le train : point de vue du passager.

Du point de vue de la vache qui regarde passer le train, pourtant, la trajectoire est courbe !

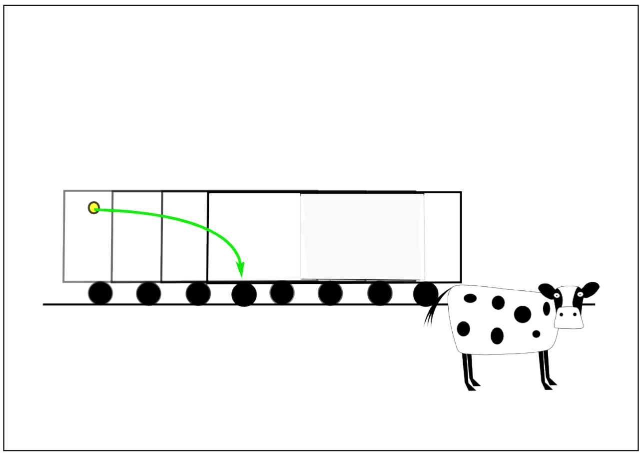


FIGURE 12.4 – Chute dans le train : point de vue de la vache.

b) Largage depuis un avion

Observons le largage de bombes depuis un avion. Si l'observateur se trouve dans un autre avion volant en formation avec le bombardier, les bombes tombent à la verticale de l'avion.

FIGURE 12.5 – Bombardement.

C La notion de trajectoire d'Aristote à Galilée en passant par Léonard de Vinci : les boulets de canons

Si il nous apparaît difficile d'étudier ce mouvement, nous pouvons nous rassurer en étudiant l'histoire des sciences. Le type de trajectoire supposée a parfois été franchement fantaisiste.

Ainsi, selon Aristote, lorsqu'on projette une balle en l'air, on lui donne une certaine "réserve" de mouvement (comme lorsque nous faisons le plein d'une voiture). Lorsque cette réserve est épuisée, la balle tombe à la verticale car le sol est "son lieu naturel".

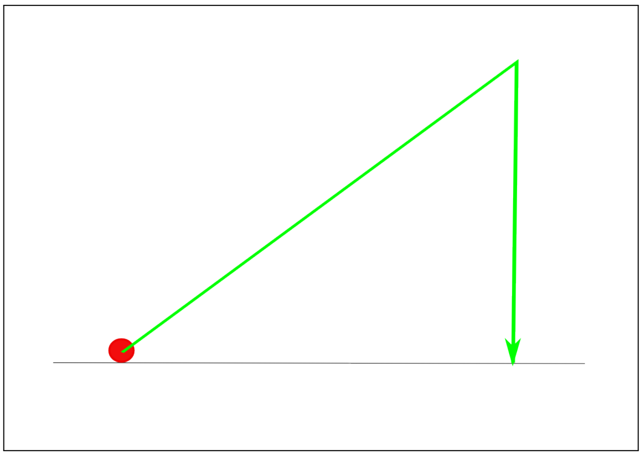


FIGURE 12.6 – Le lancer d'une balle selon Aristote.

Aristote est plutôt un biologiste. Ses opinions sur la physique sont plus de l'ordre de la philosophie. Il affirme qu'il y a quatre éléments : l'eau, l'air, la terre et le feu. Le point de vue d'Aristote est celui adopté par l'Église pendant le Moyen Âge.

À la fin du Moyen Âge, la poudre noire commence a être utilisée. Les premiers canons font leur apparition. Des manuels pour artilleurs commencent à circuler.

Au début, la trajectoire décrite reste celle d'Aristote.

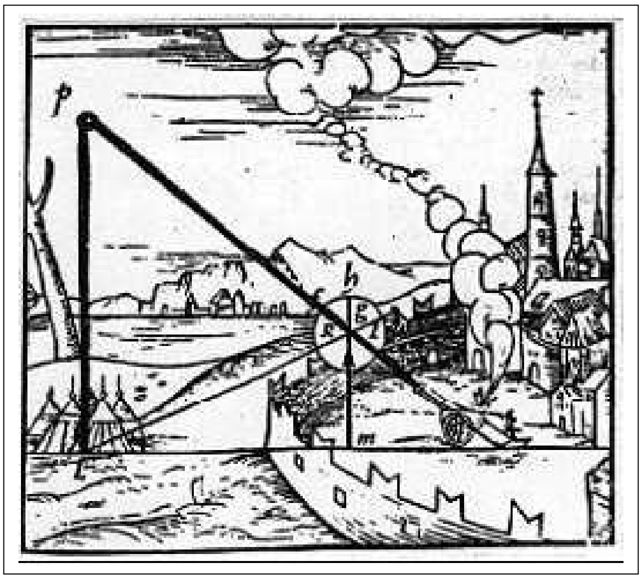


FIGURE 12.7 – Tir de canon selon Aristote.

Des mesures d'angles de plus en plus précises sont réalisées.

FIGURE 12.8 – Mesure d'angle de tir.

Le pragmatisme fait apparaître des schémas qui vont progressivement s'approcher de la réalité.

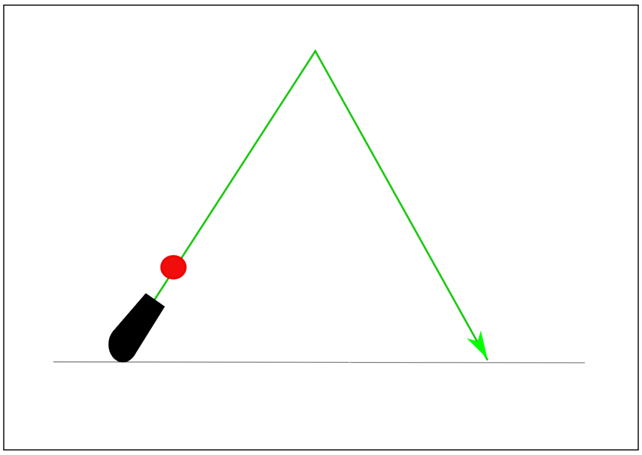


FIGURE 12.9 – Le lancer du boulet de canon au Moyen Âge : deuxième version.

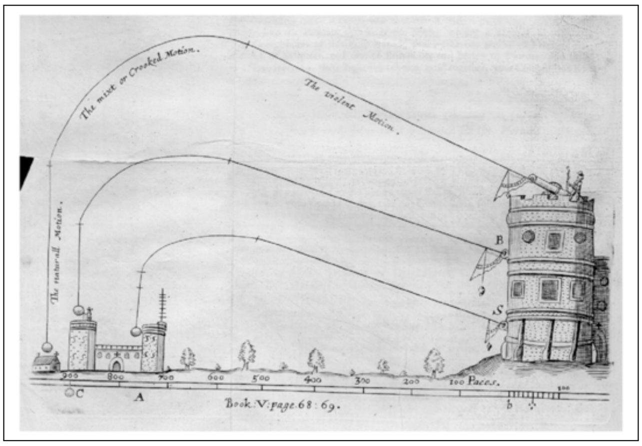


FIGURE 12.10 – Le lancer du boulet de canon au Moyen Âge : troisième version.

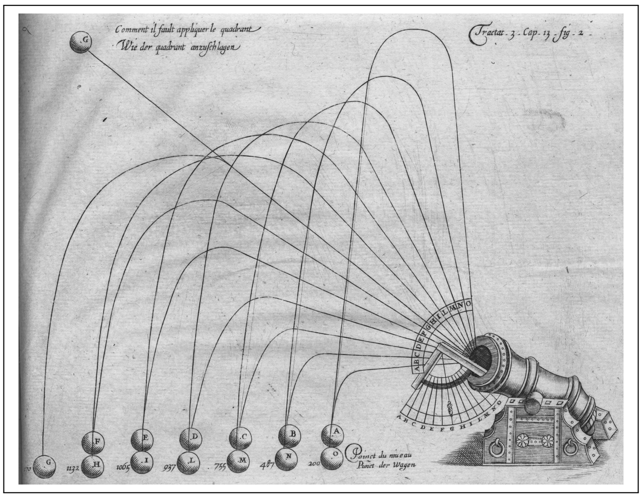


FIGURE 12.11 – Le lancer du boulet de canon au Moyen Âge : quatrième version.

Léonard de Vinci est le premier à dessiner une parabole mais sans le dire !

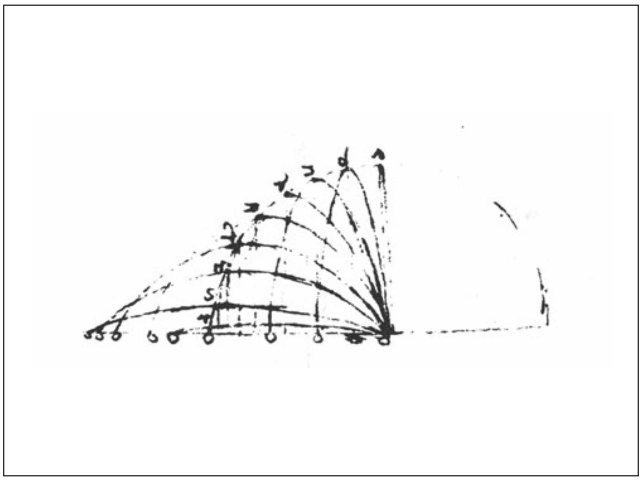


FIGURE 12.12 – Le lancer du boulet de canon selon Léonard de Vinci (1493).

Finalement, c'est Galilée qui identifie clairement la trajectoire comme parabolique.

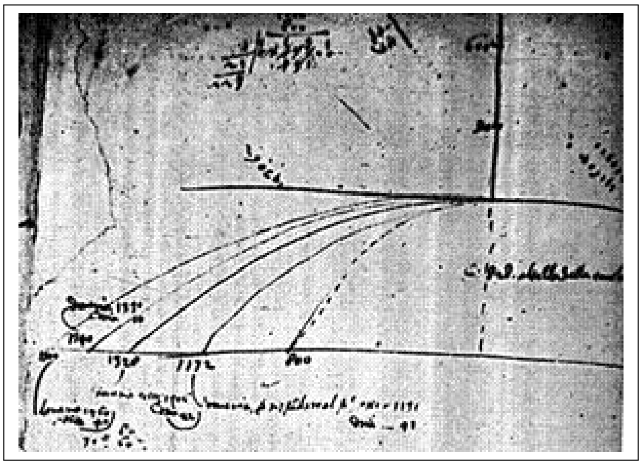


FIGURE 12.13 – Le lancer du boulet de canon selon Galilée.

2 Chronophotographie

Clarifions notre point de vue en faisant une analyse plus quantitative de ce type de mouvement. Nous connaissons la technique de la chronophotographie. Utilisons-la.

A analyse du mouvement vertical

Faisons la chronophotographie de deux balles identiques qui tombent. Elles démarrent simultanément. L'une chute à la verticale, l'autre est poussée sur le côté au début de la chute. (De même, quand je lâche ma balle depuis le train, je cesse de la pousser. Je lui ai donné une poussée horizontale qui est la vitesse du train et donc une vitesse horizontale, sans plus.)

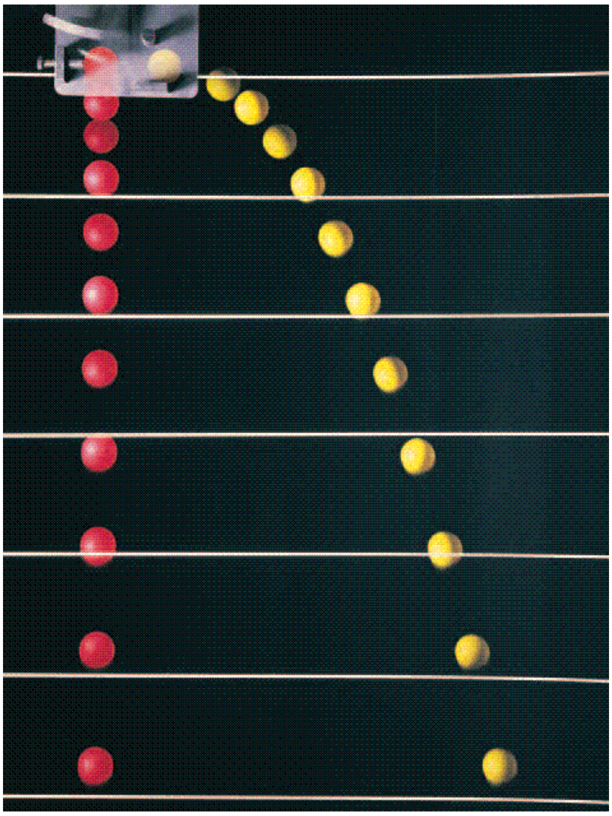


FIGURE 12.14 – Chronophotographie de deux billes.

Comptons les spots correspondants aux balles, le nombre est le même.
Nous pouvons conclure que les balles mettent le même temps pour arriver au sol.

Le mouvement vertical est le même !

Nous remarquons que les deux billes sont toujours à la même hauteur au même instant.

Propriété 4. *La composante verticale de leur position est donc identique à tout instant.*

$$\forall t : r_{1y}(t) = r_{2y}(t)$$

B Analyse quantitative du mouvement

Représentons une chronophotographie décrivant une même situation sur un diagramme avec un système d'axes.

Les images de la chronophotographie sont prises tous les $20^{èmes}$ de seconde, le sommet gauche est l'origine (0,0) du repère. Les positions de la bille sur la chronophotographie sont représentées par les points en vert. La trajectoire (également en vert) a été extrapolée mais est correcte .

Nous avons fait un choix d'axes où le sens positif de la direction verticale est vers le bas.

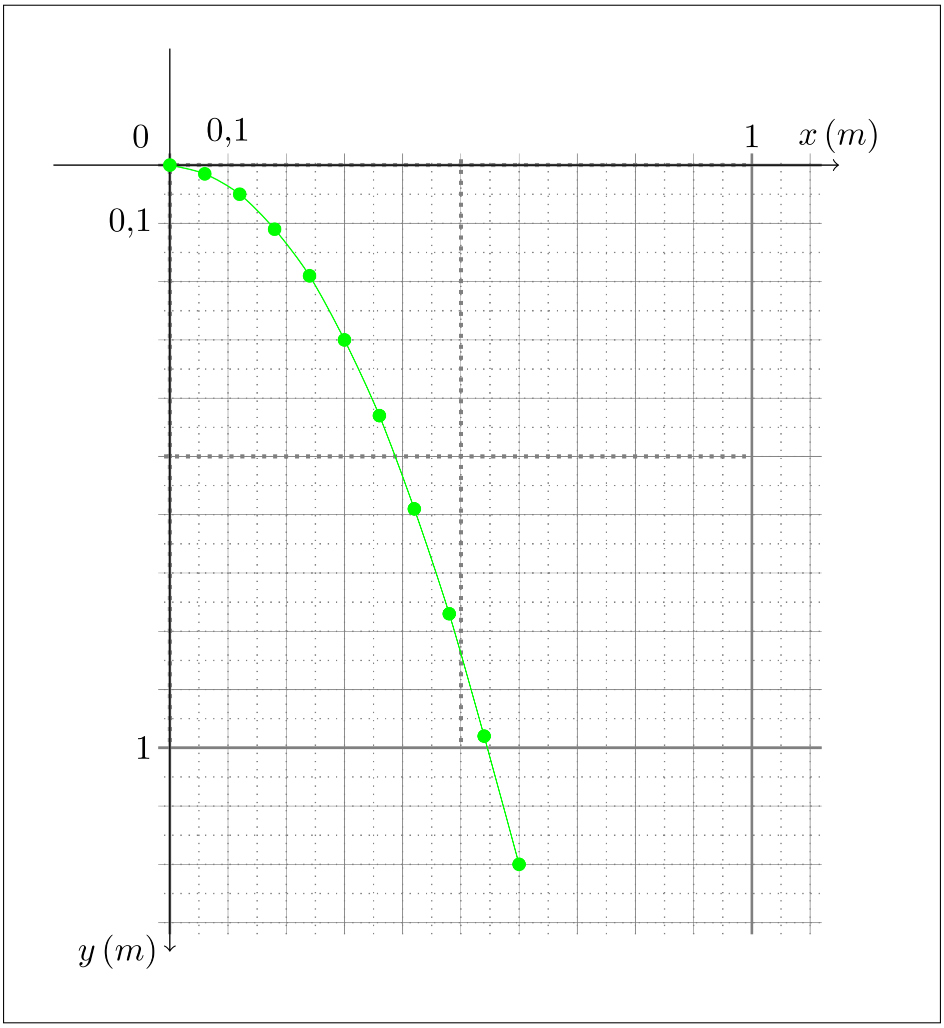


FIGURE 12.15 – Graphique de la chronophotographie.

Répondez aux questions suivantes :

1. Écrivez les coordonnées (x ;y) de chaque image de la balle. Ces coordonnées nous donnent les composantes (x ;y) du vecteur position $\vec{r}$.
2. Oubliez la composante y et faites un tableau de la composante x de $\vec{r}$ en fonction du temps (tous les $20^{èmes}$ de seconde).

   Cette composante s'écrit : $\vec{r_x}$ et comme elle dépend du temps elle s'écrira : $\overrightarrow{r_x(t)}$

   (par facilité nous ne regarderons que la norme $r_x(t)$ de $\overrightarrow{r_x(t)}$)

   Ce mouvement horizontal est il un MRU ou un MRUA ?
3. idem pour $\overrightarrow{r_y(t)}$
4. Après une demi-seconde, déterminez la vitesse horizontale $\overrightarrow{v_x(0,5)}$.
5. Après une demi-seconde, déterminez la vitesse verticale $\overrightarrow{v_y(0,5)}$.
6. Déterminez le vecteur vitesse instantanée $\overrightarrow{v(0,5)}$ alors par l'addition des vecteurs : Sa longueur $v(0,5)$ et l'angle qu'il fait avec l'horizontale.

Organisons les mesures sous la forme d'un tableau.

n^0	t (s)	$r_x(t)$ (m)	$r_y(t)$ (m)
1	0	0	0
2	0,05		
3	0,10		
4	0,15		
5	0,20		
6	0,25		
7	0,30		
8	0,35		
9	0,40		
10	0,45		
11	0,50		

3 Conclusions

Si un objet est lancé horizontalement (à la surface de la terre), alors
- les mouvements horizontaux et verticaux sont indépendants !
- Le mouvement horizontal est un MRU. La vitesse horizontale $\overrightarrow{v_x(t)}$ **est constante** ; Le déplacement horizontal est proportionnel au temps :

$$\overrightarrow{\Delta r_x(t)} = \overrightarrow{v_x(t)}.\Delta t \tag{12.1}$$

- Le mouvement vertical, lui, est un MRUA. L'accélération $\overrightarrow{a_y}$ est constante, dirigée vers le bas est égale g ($g = 9,81 m/s^2$)
- sa vitesse verticale $\overrightarrow{v_y(t)}$ est égale à

$$\overrightarrow{v_y(t)} = \vec{g}.\Delta t \tag{12.2}$$

- La position verticale est égale à

$$\overrightarrow{r_y(t)} = \frac{1}{2}.\vec{g}.\Delta t^2 \tag{12.3}$$

- Le vecteur vitesse de l'objet est obtenu à tout instant par l'addition de $\overrightarrow{v_x(t)}$ et de $\overrightarrow{v_y(t)}$.
  - La norme du vecteur se calcule par la relation de Pythagore

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \tag{12.4}$$

et

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{12.5}$$

  - le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. Son angle avec l'horizontale se calcule par la relation :

$$tg(\Theta) = \frac{v_y}{v_x} \tag{12.6}$$

4 Les équations du mouvement

A Tableau récapitulatif : Les équations horaires ou paramétriques

Attention ! Ici, l'*axe vertical* est choisi dirigé *vers le haut*. L'*origine du système* de référence est *au niveau du sol au pied du point de départ qui se trouve lui à une hauteur "h"*.

Grandeur	en X	en Y	Unité
$\overrightarrow{r_i}$	$r_{ix} = 0$	$r_{iy} = h$	(m)
$\overrightarrow{v_i}$	$v_{ix} = ...$	$v_{iy} = 0$	(m/s)
$\overrightarrow{a_i}$	$a_{ix} = a_x = 0$	$a_{iy} = a_y = -g = -9,81$	(m/s^2)
$\overrightarrow{r(t)}$	$r_x(t) = r_{ix} + v_{ix}.t + 1/2.a_x.t^2$ $= 0 + v_{ix}.t + 0$ $= v_{ix}.t$	$r_y(t) = r_{iy} + v_{iy}.t + 1/2.a_y.t^2$ $= h + 0.t + 1/2.(-9,81).t^2$ $= h + 1/2.(-9,81).t^2$	(m)
$\overrightarrow{v(t)}$	$v_x(t) = v_{ix} + a_x.t$ $= v_{ix}$ $= v_{ix}$	$v_y(t) = v_{iy} + a_y.t$ $= a_y.t$ $= -9,81.t$	(m/s)
$\overrightarrow{a(t)}$	$a_x(t) = a_{ix} = a_x = 0$	$a_y(t) = a_{iy} = -9,81$	(m/s^2)
$\overrightarrow{r_f}$	$r_{fx} = v_{ix}.t_f$	$r_{fy} = h - (1/2.9,81.t_f) = 0$	(m)
$\overrightarrow{v_f}$	$v_{fx} = v_{ix}$	$v_{fy} = (-9,81).t_f$	(m/s)
$\overrightarrow{a_f}$	$a_{fx} = 0$	$a_{fx} = a_x = -9,81$	(m/s^2)

TABLE 12.1 – Les équations horaires du tir horizontal.

B Trajectoire : les équations cartésiennes

Pour savoir quelle trajectoire exacte le mobile va suivre, il faut, ici, obtenir une équation reliant "r_x" et "r_y" à tout instant "t".

$$\begin{cases} r_x(t) = v_0.t \\ r_y(t) = h - 1/2.g.t^2 \end{cases} \tag{12.7}$$

Il faut isoler "t" dans la première équation et substituer ce "t" dans la deuxième. (Pour alléger les notations, nous n'écrirons plus "$r_x(t)$" dans ce qui suit mais "x", de même en "y".)

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0} \\ y = h - 1/2 \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \end{cases} \tag{12.8}$$

L'équation de la trajectoire peut s'écrire :

Conclusion 2 (Équation de la trajectoire du tir horizontal)**.**

$$y = \frac{-g}{2v_0^2}x^2 + h \tag{12.9}$$

Cette équation est clairement une équation d'une branche de parabole.

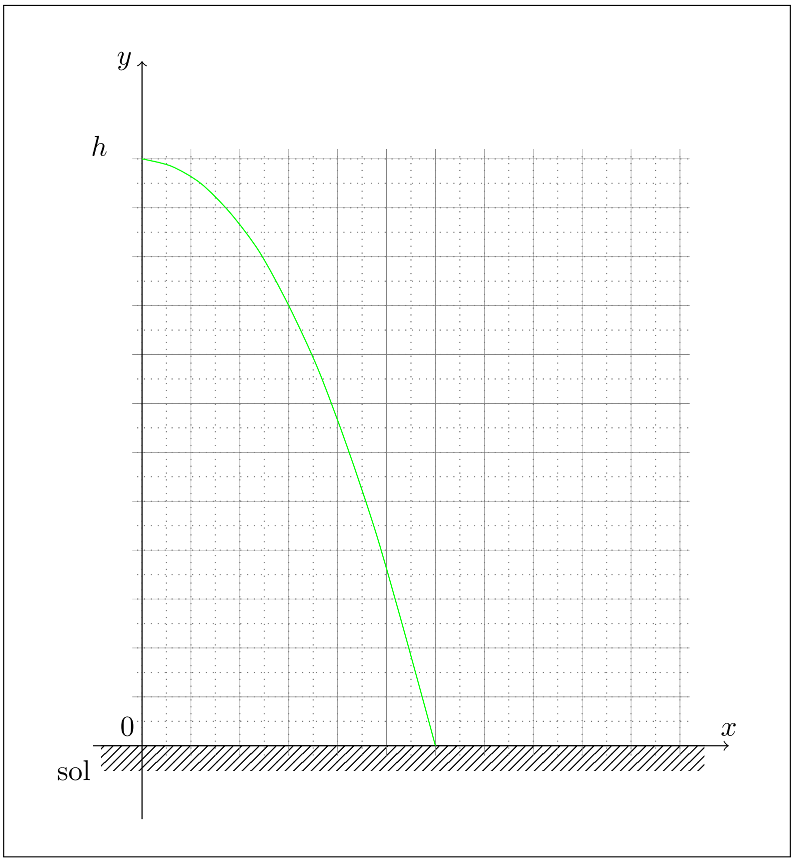


FIGURE 12.16 – La trajectoire est parabolique.

La trajectoire du mobile est une branche de parabole dans le tir horizontal.

5 Portée

La portée "R" est la distance maximale susceptible d'être atteinte. Elle se mesure au sol depuis la verticale du point de départ.

Elle s'obtient en cherchant les racines de l'équation de la trajectoire. Il faut donc poser "$y = 0$" dans l'équation 2 p. 107. Comme le sommet de la parabole est au dessus de l'origine, les deux racines sont opposées l'une de l'autre. Nous garderons la racine positive.

$$R = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{12.10}$$

La portée "R" du tir horizontal est purement fonction de la vitesse horizontale initiale et de l'altitude de départ.

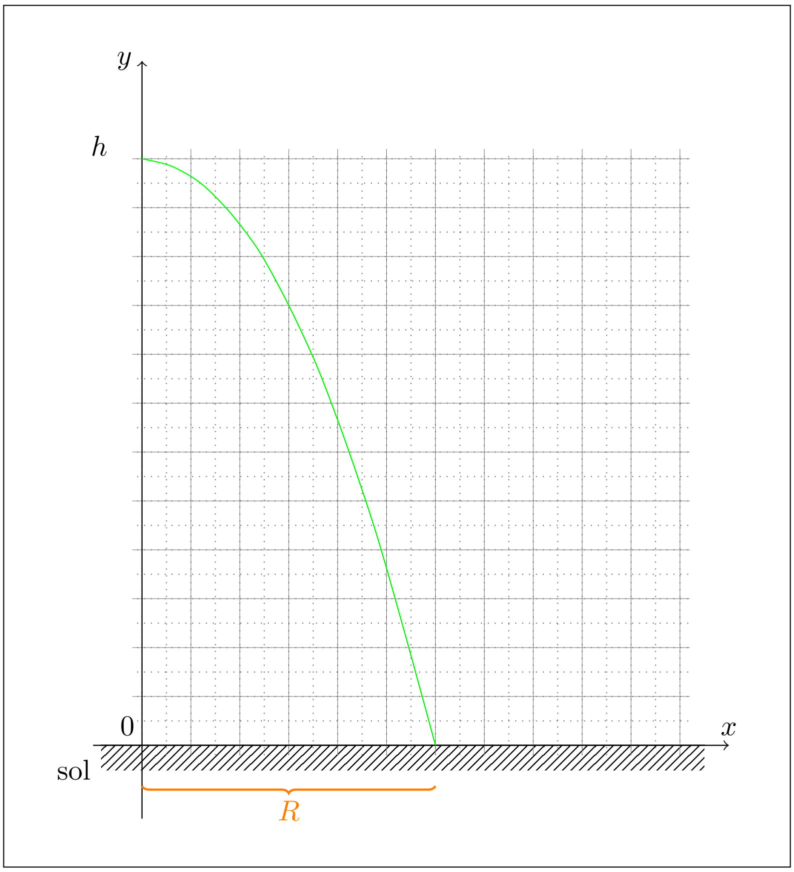


FIGURE 12.17 – La portée du tir horizontal.

6 Autres

A Vitesse en fonction de l'altitude

$$v_y(r_y) = \sqrt{2g\Delta r_y} \tag{12.11}$$

B Angles

L'angle θ que fait la vitesse par rapport à l'horizontale en tout point de la trajectoire est fournit par les composantes du vecteur vitesse.

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} \tag{12.12}$$

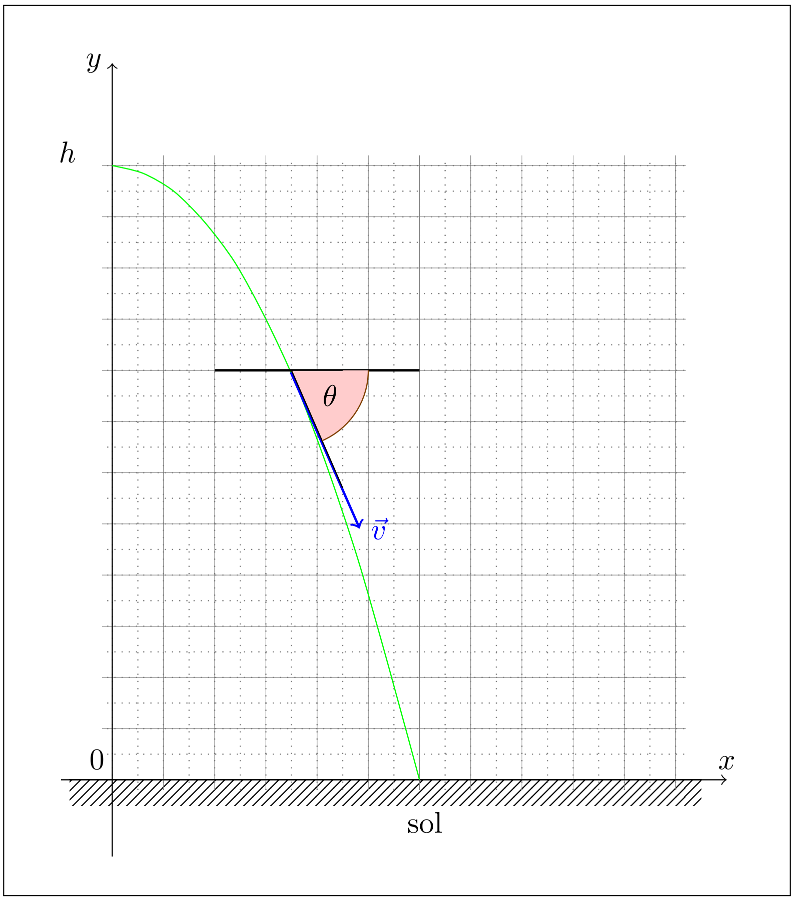


FIGURE 12.18 – L'angle de la vitesse avec l'horizontale dans le tir horizontal.

Ceci explique, en partie, pourquoi il a été si difficile d'analyser le tir horizontal.

Rappelons que les frottements introduisent une accélération s'opposant au mouvement, proportionnelle mais opposée à la vitesse :

$$\vec{a} = -b\vec{v} \tag{12.13}$$

où b est un coefficient dit "de traînée" dépendant de la densité de l'objet, de sa géométrie et du milieu traversé (ici de l'air).

L'accélération dans un mouvement "réel" va donc être l'addition de l'accélération constante de gravité "g" qui est verticale et de cette accélération due aux frottements qui est oblique et variable en grandeur et direction avec le temps . Ceci complique sérieusement les équations et il faut avoir recours à un système d'équations différentielles. Cette démarche est non triviale et dépasse le cadre de ce cours.

C $\vec{a}_n$, $\vec{a}_{tg}$

En combinant le fait que l'accélération g est constante en norme et en direction avec le point précédent, il est possible de déterminer les accélérations normales et tangentielles.

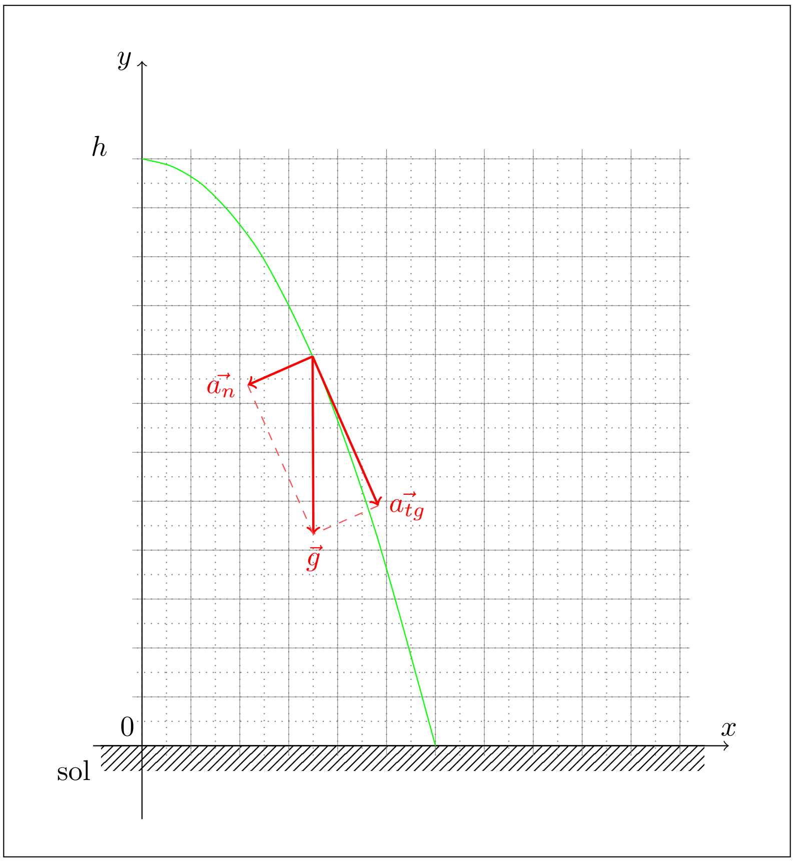


FIGURE 12.19 – Les accélérations normales et tangentielles.

Remarquons simplement qu'au départ l'accélération est purement normale et qu'elle devient de plus en plus tangentielle avec le temps.

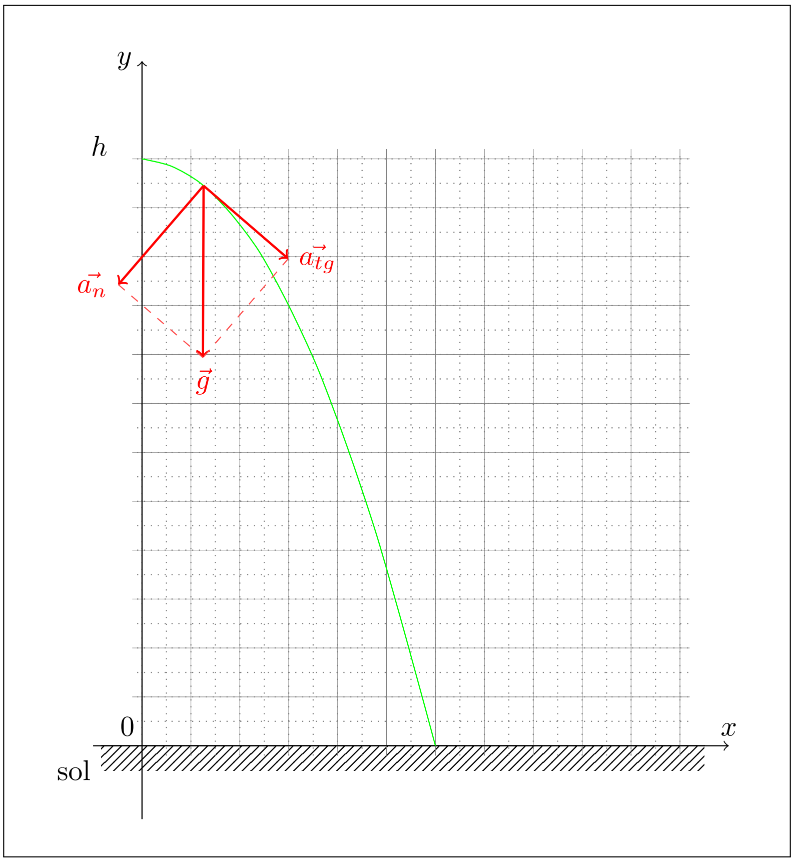


FIGURE 12.20 – Les accélérations normales et tangentielles peu après le départ.

7 Exercices

Chapitre 13

Le tir oblique ou parabolique

Sommaire

Introduction

Un lancer d'objet à proximité de la surface terrestre comme dans le cas du tir horizontal représente plutôt l'exception que la règle. Très souvent, la vitesse initiale de l'objet n'est ni purement horizontale ni purement verticale mais oblique.

Les exemples typiques de ce type de mouvement sont :

— les lancers de balles (golf, football, tennis ...)

— et les lancers de projectiles *non* auto-propulsés (canons, balles de fusil, catapultes, et balistes ...).

Nous allons ici traiter le problème au travers des équations du mouvement.

1 Équations du mouvement

A Les règles du jeu

Nous allons donc étudier des mouvements où la seule accélération est due à la gravité terrestre [1] .

La vitesse initiale est une vitesse oblique à la surface de la Terre.

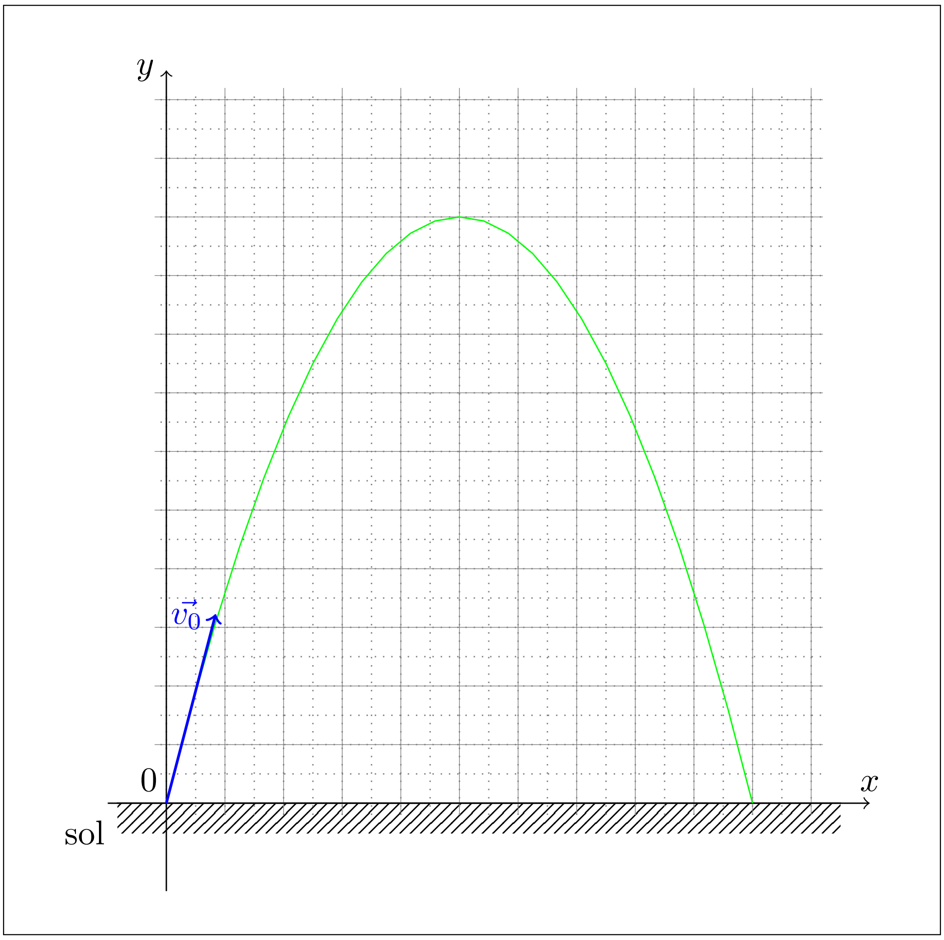


FIGURE 13.1 – Le tir oblique.

Les équations du mouvement, dans notre cas, doivent tenir compte de l'indépendance des mouvements horizontaux et verticaux.

1. Cette étude peut s'étendre à tout mouvement à la surface d'un astre. Il suffira de prendre une valeur de "g" adaptée à l'astre en question.

Nous négligerons aussi les frottements.

B Vitesse initiale oblique

Le premier point à traiter est la vitesse initiale.

Cette vitesse est oblique par rapport à la surface de la Terre, puisque c'est ainsi que nous définissons le mouvement que nous étudions.

La vitesse initiale peut toujours se décomposer en une vitesse horizontale et une vitesse verticale.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \tag{13.1}$$

Si la vitesse initiale est fournie par un dispositif comme un canon ou le pied d'un joueur de football, il est raisonnable de considérer que la norme (maximale) de la vitesse initiale est constante.

Ce qui va faire varier les valeurs des vitesses horizontale et verticale sera l'angle θ que fait le vecteur vitesse initiale l'horizontale.

Si "v" est la norme du vecteur vitesse, nous pourrons écrire :

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases} \tag{13.2}$$

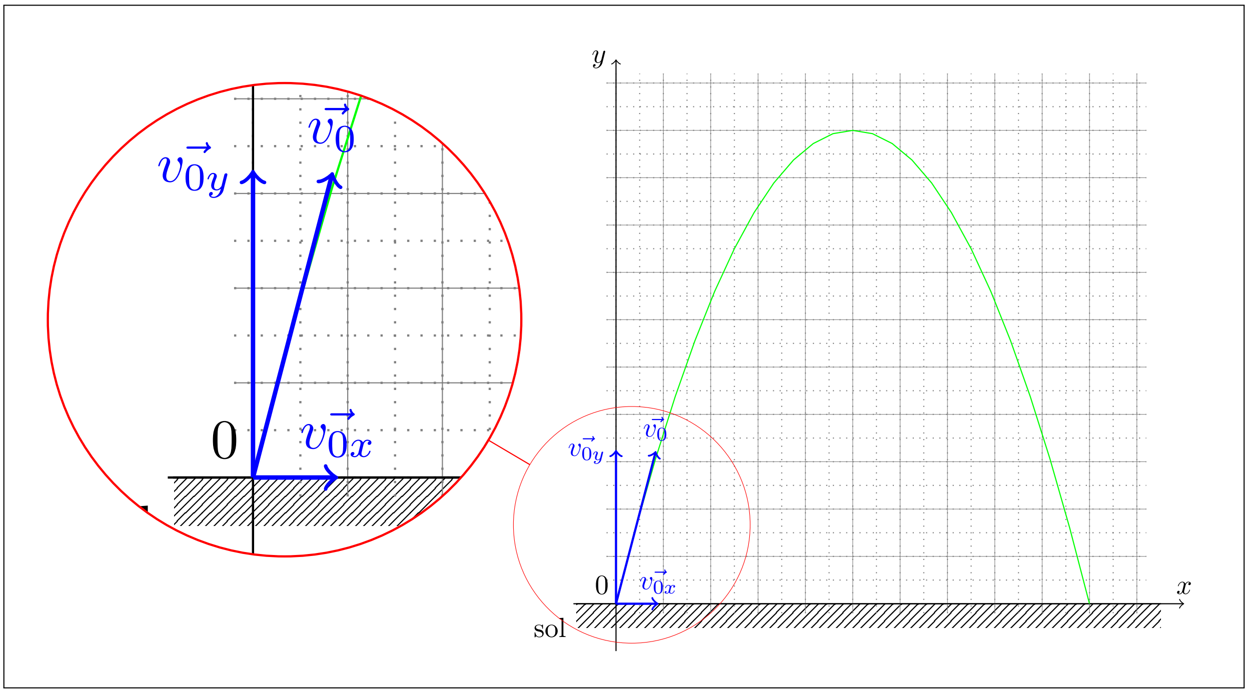


FIGURE 13.2 – Les composantes de la vitesse initiale.

C Vitesse

a) Composante horizontale

Comme dans le cas du tir horizontal, le mouvement horizontal ne connaît pas d'accélération. la vitesse horizontale est donc constante.

$$v_x(t) = v_x = \text{cste.} \tag{13.3}$$

La partie horizontale du mouvement obéira aux équations du MRU.

b) Composante verticale

Contrairement au cas du tir horizontal, la vitesse initiale verticale n'est pas nulle.
Le mouvement vertical connaît une accélération : la gravité.
La vitesse verticale obéira donc aux équations du MRUA : la loi des vitesse.

$$v_y(t) = v_{0y} + gt \tag{13.4}$$

(i) Signes Il faut être attentif aux signes.
Nous avons écrit "$+gt$", mais ceci il faut préciser le signe de "g".

Si nous discutons d'un tir de canon ou du lancer d'une balle de tennis, il est raisonnable de prendre le lieu du tir comme origine du système de référence. Dans la direction verticale, le sens positif est "vers le haut".

Dans ce cas, "g" est négatif !

$$v_y(t) = v_{0y} - 9{,}81\,t \tag{13.5}$$

D Équations paramétriques ou horaires

Rassemblons les équations sous forme de tableau :

Grandeur	en X	en Y	Unité
$\overrightarrow{r_0}$	$r_{0x} = 0$	$r_{0y} = 0$	(m)
$\overrightarrow{v_0}$	$v_{0x} = v_0 \cos\theta$	$v_{0y} = v_0 \sin\theta$	(m/s)
$\overrightarrow{a_0}$	$a_{0x} = a_x = 0$	$a_{0y} = a_y = -9{,}81(= -g)$	(m/s^2)
$\overrightarrow{a(t)}$	$a_x(t) = a_{0x} = a_x = 0$	$a_y(t) = a_{0y} = a_y = -g$	(m/s^2)
$\overrightarrow{v(t)}$	$v_x(t) = v_{0x} + a_x.t$ $v_x(t) = v_0 \cos\theta$	$v_y(t) = v_{0y} + a_y.t$ $v_y(t) = v_0 \sin\theta - g.t$	(m/s)
$\overrightarrow{r(t)}$	$r_x(t) = r_{0x} + v_{0x}.t + 1/2.a_x.t^2$ $r_x(t) = 0 + v_0 \cos\theta.t + 1/2.0.t^2$ $r_x(t) = v_0 \cos\theta.t$	$r_y(t) = r_{0y} + v_{0y}.t + 1/2.a_y.t^2$ $r_y(t) = v_0 \sin\theta.t - 1/2.g.t^2$ $r_y(t) = v_0 \sin\theta.t - 1/2.g.t^2$	(m)

2 Trajectoire : équation cartésienne

Pour savoir quelle trajectoire exacte le mobile va suivre, il faut, ici, obtenir une équation reliant "r_x" et "r_y" à tout instant "t".

$$\begin{cases} r_x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t \\ r_y(t) = v_0 \sin\theta \cdot t - 1/2 g t^2 \end{cases} \tag{13.6}$$

Il faut isoler "t" dans la première équation et substituer ce "t" dans la deuxième. (Pour alléger les notations, nous n'écrirons plus "$r_x(t)$" dans ce qui suit mais "x", de même en "y".)

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \\ y = v_0 \sin\theta . \frac{x}{v_0 \cos\theta} - 1/2 g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 \end{cases} \tag{13.7}$$

L'équation de la trajectoire est :

$$y = x \tan\theta - x^2 \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \tag{13.8}$$

Cette équation est clairement une équation de parabole.

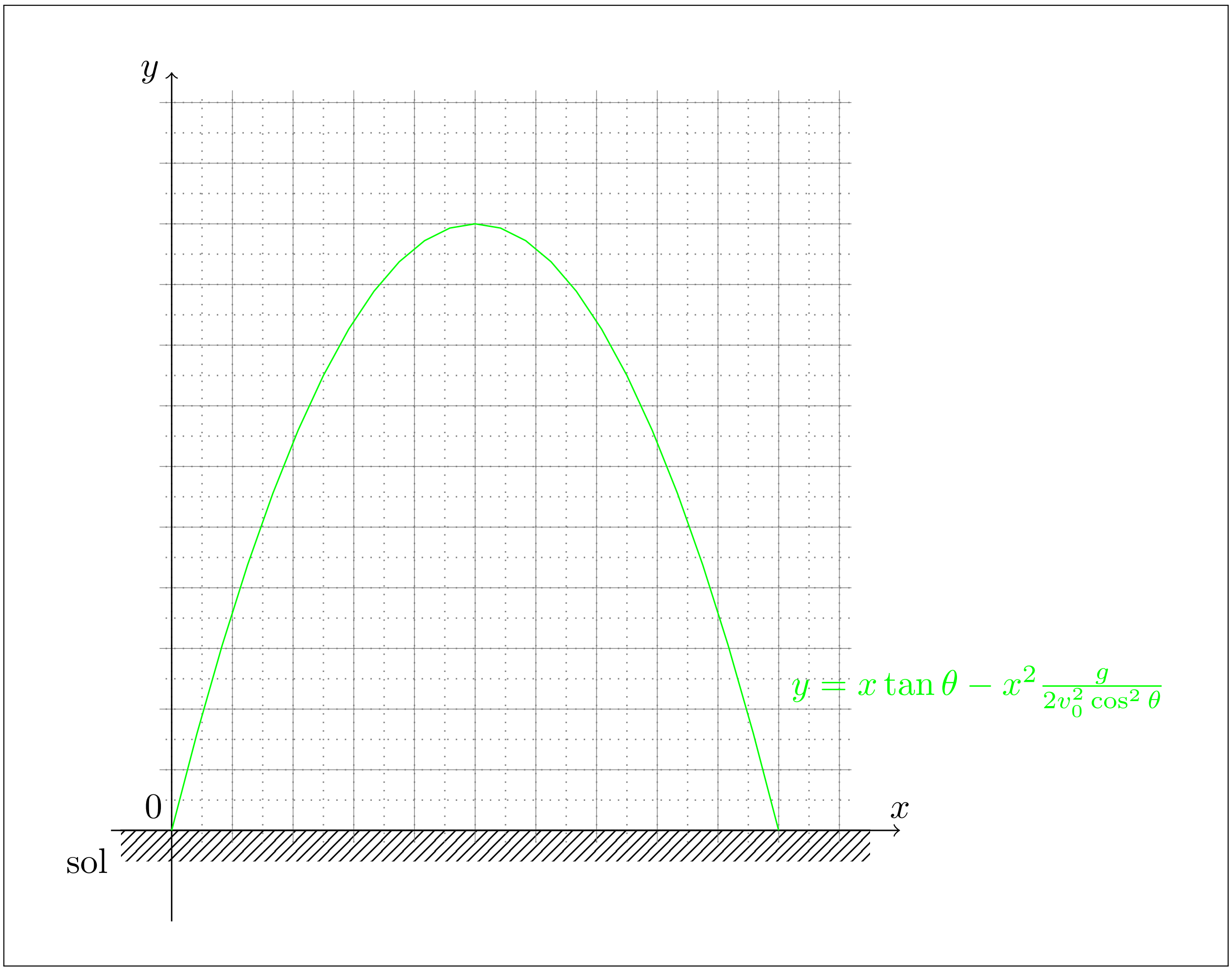


FIGURE 13.3 – La trajectoire du tir oblique est une parabole.

La trajectoire du mobile est parabolique dans le tir oblique.

3 Portée

Déterminons maintenant le point de chute du mobile.

A En général

Le point de chute est un point de la trajectoire tel que $r_y(t) = 0$. Une solution triviale est le point de départ où $t = 0$, $r_y = 0$ et $r_x = 0$.

Il faut donc trouver un r_x qui sera la solution non triviale du système d'équation :

$$\begin{cases} r_x(t) = v_0\cos\theta \cdot t \\ 0 = v_0\sin\theta \cdot t - 1/2gt^2 \end{cases} \tag{13.9}$$

Utilisons l'équation 13.8 (page 116) de la trajectoire. Ceci implique de résoudre l'équation

$$0 = x\tan\theta - x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} \tag{13.10}$$

Celle-ci se factorise facilement.

$$0 = x\left(x\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} - \tan\theta\right) \tag{13.11}$$

Si on élimine la solution triviale en $x = 0$, il reste :

$$x \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} = \tan \theta \tag{13.12}$$

On obtient donc :

$$x = \frac{2 \sin \theta \cos \theta \, v_0^2}{g} \tag{13.13}$$

si on se souvient que $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, il vient alors :

$$x = \sin 2\theta \frac{v_0^2}{g} \tag{13.14}$$

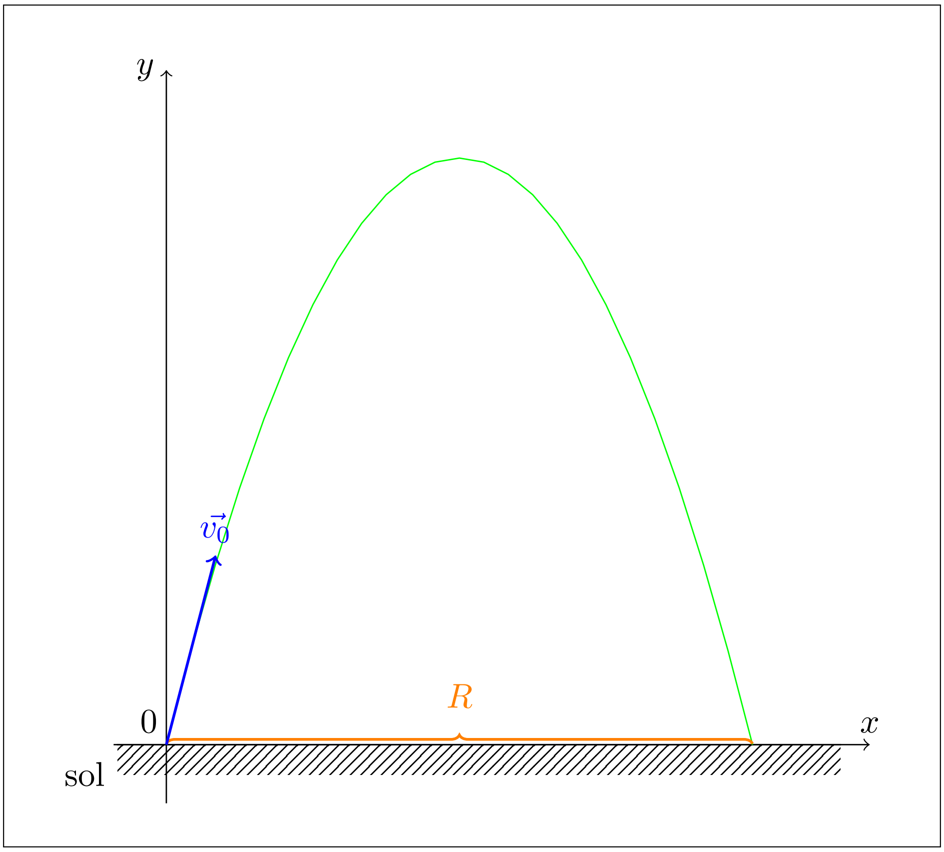


FIGURE 13.4 – La portée dans le tir oblique.

B Portée maximale

Nous venons de trouver la solution si l'angle "θ" est quelconque.

On peut se demander s'il n'existe pas, pour un v_0 donné, un angle "θ" tel que la portée est maximale.

La question précédente se ramène donc à chercher un angle "θ" tel que "$\sin 2\theta$" est maximum.

Le bon sens nous dit qu'il faut un angle "θ" tel que $\sin 2\theta = 1$.

L' angle "θ" est donc égal à $\pi/4$ ou 45^0.

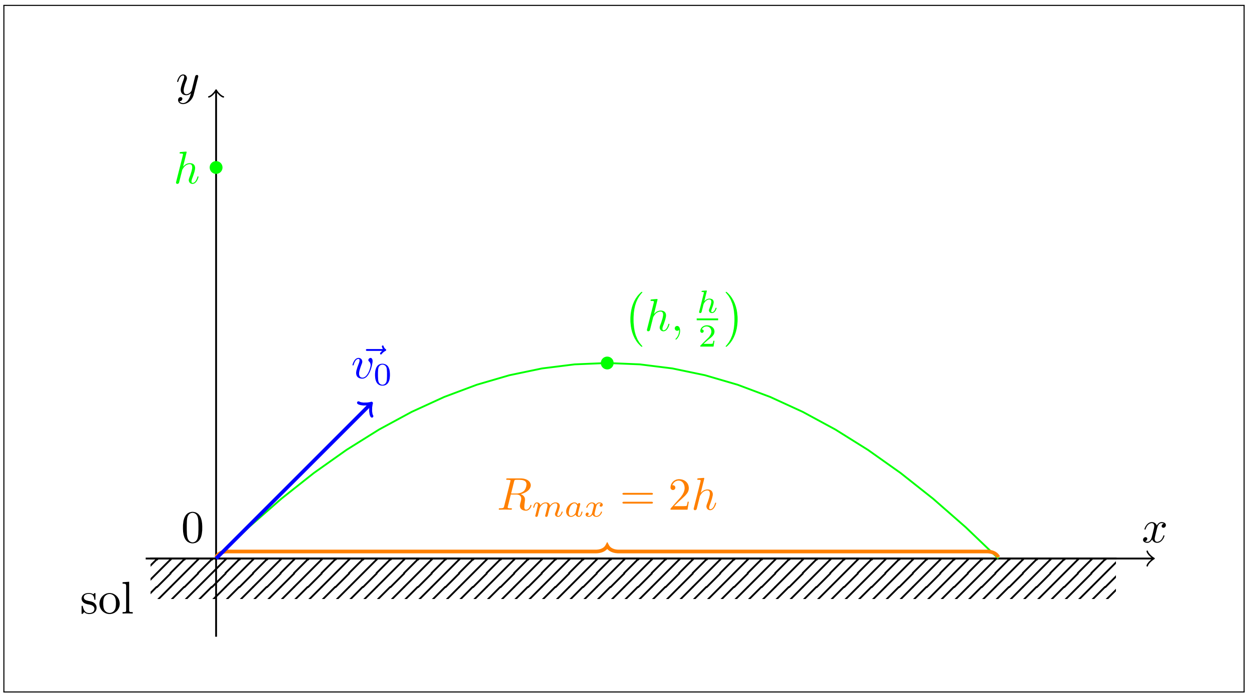


FIGURE 13.5 – La portée maximale dans le tir oblique.

a) Optimisation

La solution précédente peut aussi se trouver en cherchant le maximum de $\sin 2\theta \frac{v_0^2}{g}$ et donc dérivant l'expression précédente en θ. La valeur où la dérivée s'annule sera un optimum.

4 Autres

A Hauteur maximale

On peut montrer que la hauteur maximale atteinte par le mobile est exprimée par l'équation suivante :

$$y\text{max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta \qquad (13.15)$$

Si le projectile est lancé à la verticale, alors θ vaut $\pi/2$ et la hauteur maximale "h" est

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \qquad (13.16)$$

B Vitesse en fonction de l'altitude

$$v_y(r_y) = \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta - 2g(r_y - r_{y0})} \qquad (13.17)$$

C Angles

L'angle d'impact en tout point de la trajectoire est donné par le vecteur vitesse.

D $\vec{a}_n$, $\vec{a}_{tan}$

En combinant le fait que l'accélération g est constante en norme et en direction avec le point précédent, il est possible de déterminer les accélérations normales et tangentielles.

5 Cibles

Il faut étudier le cas où il faut atteindre une cible ne se trouvant pas à la même altitude que le point de départ du mobile.

Les exemples typiques sont le panier du ballon de basketball ou un canon devant atteindre une cible sur une colline.

FIGURE 13.6 – La cible dans le tir oblique.

Traitons le cas du ballon de basket.

D'après les règles du basketball, l'anneau du panier doit se trouver à 3,05m de haut (disons 3 mètres pour simplifier les choses).

Toujours pour simplifier les choses disons que le joueur lance le ballon depuis une hauteur de 2 mètres et qu'il est à 3 mètres de distance du panier.

Si la vitesse v_0 à laquelle le joueur lance le ballon est fixe, le joueur doit modifier son angle de lancer pour atteindre le panier.

A Équations générales

Essayons de traiter le problème en toute généralité puis nous reviendrons à notre joueur de basket !

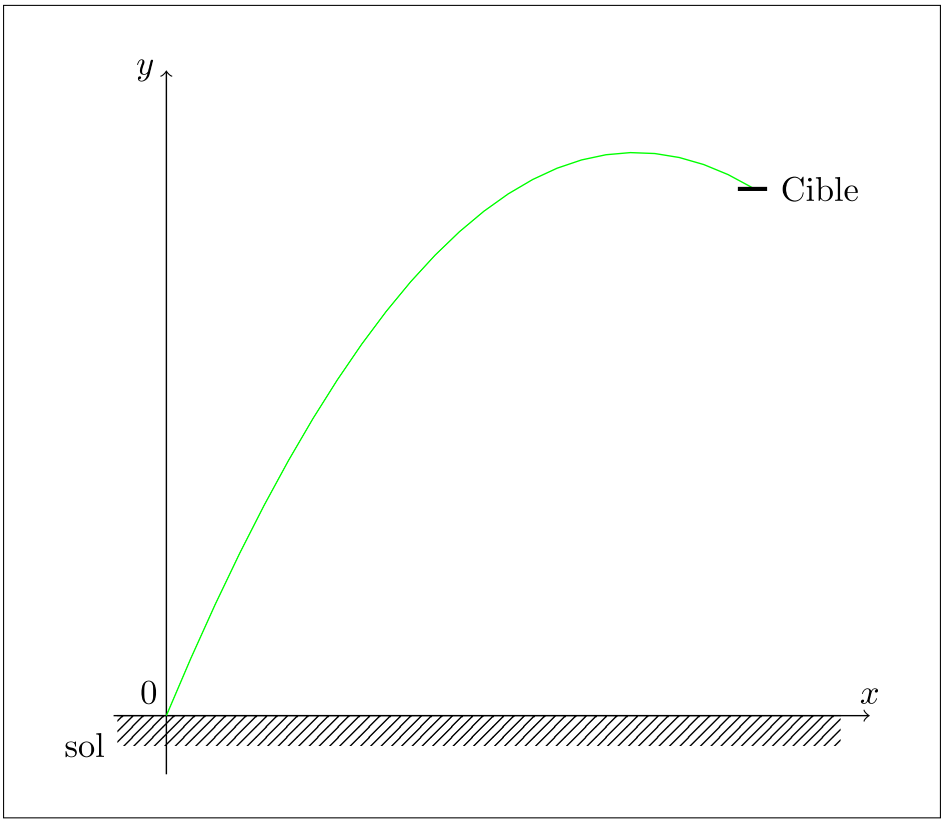


FIGURE 13.7 – La position de la cible, cas général dans le tir oblique.

La cible est donc à une position (r_{xf}, r_{yf}).[2]

À nouveau simplifions quelque peu les notations : r_{xf} et r_{yf} deviendront respectivement x_f et y_f .

Il faut substituer x_f et y_f dans l'équation 13.8 (page 116).

$$y_f = x_f \tan\theta - x_f^2 \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} \tag{13.18}$$

Supposons que v_0 soit fixée et essayons de déterminer l'angle θ qui nous permettra d'atteindre la cible.

$$y_f = x_f \tan\theta - x_f^2 \frac{g}{2v_0^2}\frac{1}{\cos^2\theta} \tag{13.19}$$

Si on se souvient que $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, il vient :

$$y_f = x_f \tan\theta - x_f^2 \frac{g}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\theta\right) \tag{13.20}$$

Nous avions vu dans l'équation 13.16 (p. 119) que

$h = \frac{v_0^2}{2g}$ où h est la hauteur maximale que le projectile peut atteindre. Si nous utilisons cette égalité, il vient :

$$y_f = x_f \tan\theta - x_f^2 \frac{1}{4h}\left(1+\tan^2\theta\right) \tag{13.21}$$

Transformons cette équation.

2. r_{xf} et r_{yf} car il s'agira de la position finale du mobile !

$$x_f \tan\theta - x_f^2 \frac{1}{4h} \tan^2\theta - \left(y_f + x_f^2 \frac{1}{4h} \right) = 0 \tag{13.22}$$

$$x_f^2 \frac{1}{4h} \tan^2\theta - x_f \tan\theta + \left(y_f + x_f^2 \frac{1}{4h} \right) = 0 \tag{13.23}$$

Nous avons obtenu une équation du second degré en $\tan\theta$

$$a \tan^2\theta + b \tan\theta + c = 0 \tag{13.24}$$

dont les coefficients sont respectivement

$$\begin{cases} a = \frac{x_f^2}{4h} \\ b = -x_f \\ c = y_f + \frac{x_f^2}{4h} \end{cases} \tag{13.25}$$

a) Solutions de l'équation du second degré

Les solutions $\tan_1$ et $\tan_2$ de cette équation du second degré se déterminent comme à l'habitude !

(i) Le discriminant

Il faut tout d'abord discuter l'existence de solutions !
Δ (ou ρ) vaut $b^2 - 4ac$
C'est-à-dire ici :

$$\Delta = x_f^2 - 4x_f^2 \frac{1}{4h} \left(y_f + x_f^2 \frac{1}{4h} \right) \tag{13.26}$$

$$\Delta = x_f^2 - \frac{x_f^2}{h} \left(y_f + \frac{x_f^2}{4h} \right) \tag{13.27}$$

(ii) Discriminant nul ou la parabole de sûreté

Étudions le cas limite où le discriminant est nul et où il n'y a donc qu'une seule solution.

$$\Delta = 0 = x_f^2 - \frac{x_f^2}{h} \left(y_f + \frac{x_f^2}{4h} \right) \tag{13.28}$$

Cette expression peut se simplifier et donner :

$$y_f = h - \frac{x_f^2}{4h} \tag{13.29}$$

Cette expression est appelée la parabole de sûreté. Cette parabole englobe toutes les trajectoires possibles si l'on fait varier l'angle de tir pour une même vitesse initiale.

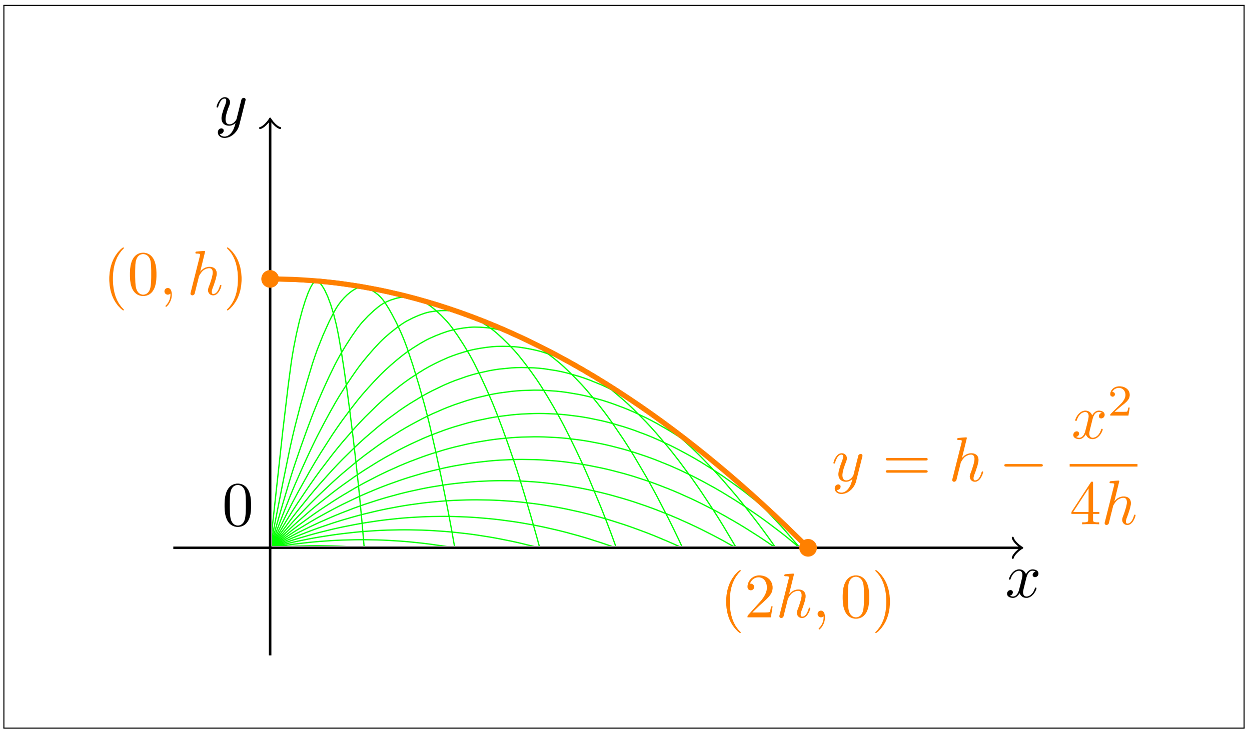


FIGURE 13.8 – La parabole de sûreté enveloppe les trajectoires possibles.

L' expression de la parabole de sûreté exprime la limite de la portée du projectile.

Si $x_f = 0$, alors $y_f = h$.

Et si si $x_f = 2h$, alors $y_f = 0$ et on retrouve la portée maximale horizontale.

Pour atteindre un point sur cette parabole de sûreté, il faut résoudre l'équation trigonométrique où $\tan_0 = \frac{-b}{2a}$, c'est-à-dire :

$$\tan_0 = \frac{x_f}{2\frac{x_f^2}{4h}} \tag{13.30}$$

$$\tan_0 = \frac{2h}{x_f} \tag{13.31}$$

Remarquons que le croquis de Léonard de Vinci vu au chapitre "Tir Horizontal" reproduit notre parabole de sécurité.

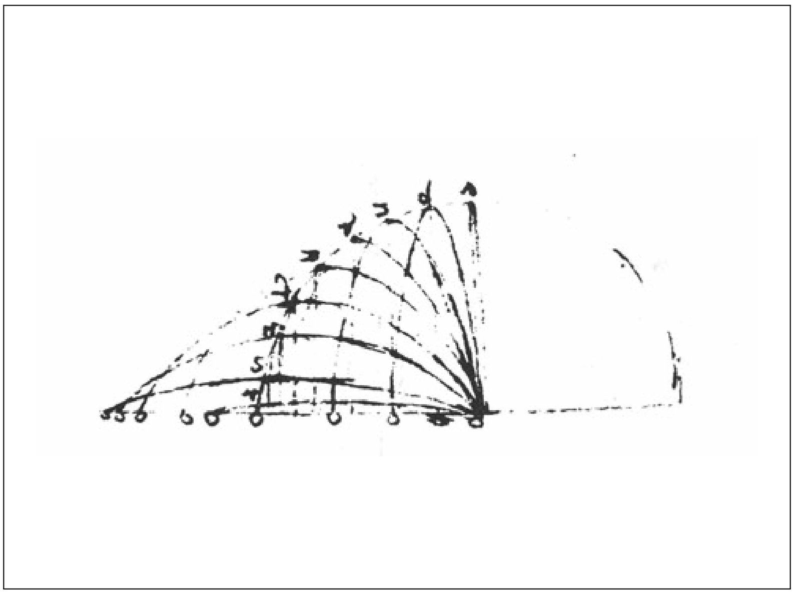


FIGURE 13.9 – La parabole de sûreté de Léonard de Vinci.

Les sommets des trajectoires sont sur une même ellipse et c'est ce qu'indique Léonard de Vinci dans son croquis. Cette propriété géométrique permet d'affirmer que de Vinci avait une vision théorique correcte de la trajectoire.

C'est un autre italien, Torricelli, qui a découvert la parabole de sûreté. Mais il fût la risée des canonniers de l'époque car il ne savait pas expliquer l'asymétrie de la trajectoire réelle. Pourtant, pour pouvoir appliquer la théorie des frottements, il faut tout d'abord passer par cette vision théorique sans frottement.

(iii) Trop loin !

Si le discriminant est négatif,

$$h - \frac{x_f^2}{4h} - y_f < 0 \tag{13.32}$$

alors la cible n'est pas atteignable.
Cette condition peut aussi s'écrire

$$h < y_f + \frac{x_f^2}{4h} \tag{13.33}$$

où, rappelons-le, $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

$$\frac{v_0^2}{2g} < y_f + \frac{g x_f^2}{2 v_0^2} \tag{13.34}$$

(iv) Deux solutions

Si le discriminant est strictement positif,

$$h - \frac{x_f^2}{4h} - y_f > 0 \tag{13.35}$$

et si nous nous souvenons que $a = \frac{x_f^2}{4h}$, $b = -x_f$ et $c = y_f + \frac{x_f^2}{4h}$,
alors les solutions $\tan_1$ et $\tan_2$ sont

$$\begin{cases} \tan_1 = \dfrac{x_f - \sqrt{h - \frac{x_f^2}{4h} - y_f}}{2\frac{x_f^2}{4h}} \\ \tan_2 = \dfrac{x_f + \sqrt{h - \frac{x_f^2}{4h} - y_f}}{2\frac{x_f^2}{4h}} \end{cases} \tag{13.36}$$

Ces solutions peuvent aussi s'écrire

$$\begin{cases} \tan_1 = \dfrac{2h\left(x_f - \sqrt{h - \frac{x_f^2}{4h} - y_f}\right)}{x_f^2} \\ \tan_2 = \dfrac{2h\left(x_f + \sqrt{h - \frac{x_f^2}{4h} - y_f}\right)}{x_f^2} \end{cases} \tag{13.37}$$

Il faut calculer la fonction inverse pour trouver la valeur des angles "θ_1" et "θ_2".

$$\begin{cases} \theta_1 = \arctan \dfrac{2h\left(x_f - \sqrt{h - \frac{x_f^2}{4h} - y_f}\right)}{x_f^2} \\ \theta_2 = \arctan \dfrac{2h\left(x_f + \sqrt{h - \frac{x_f^2}{4h} - y_f}\right)}{x_f^2} \end{cases} \tag{13.38}$$

B De haut, c'est plus beau : la citadelle

Si le lancer se fait en hauteur par rapport à la cible, la portée sera plus grande.

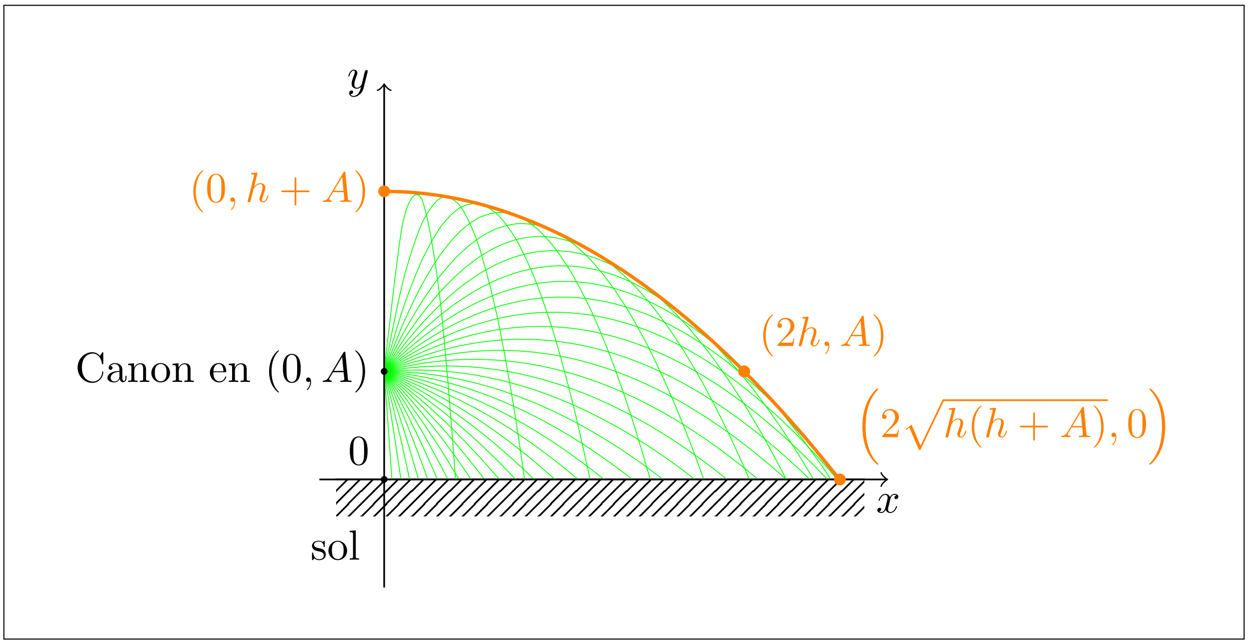


FIGURE 13.10 – La cible est dans la plaine, le canon en hauteur.

Soit "A" la hauteur de la "citadelle" par rapport à la plaine où se trouve la cible.
Si on considère la portée maximale du canon, la cible doit se trouver sur la parabole de sûreté.

$$y_f = h - \frac{x_f^2}{4h} \tag{13.39}$$

Comme la cible est en contrebas, son ordonnée est négative.

$$y_f = -A \tag{13.40}$$

La relation entre l'ordonnée et l'abscisse de la cible "x_f" devient alors

$$-A = h - \frac{x_f^2}{4h} \tag{13.41}$$

et donc la portée horizontale est

$$x_f = 2\sqrt{h(h+A)} \tag{13.42}$$

Traçons la ligne directe entre le canon et la cible et cherchons sa longueur "d". Cette longueur "d" sera l' hypoténuse d'un triangle rectangle dont les longueurs des côtés seront "A" et "x_f". Par le théorème de Pythagore, nous avons donc que la distance entre la citadelle et la cible sera :

$$d = 2h + A \tag{13.43}$$

a) Cible en hauteur

Les assaillants,s'ils disposent de la même puissance de feu, devront être plus proches. Faisons le même raisonnement avec la cible en hauteur.

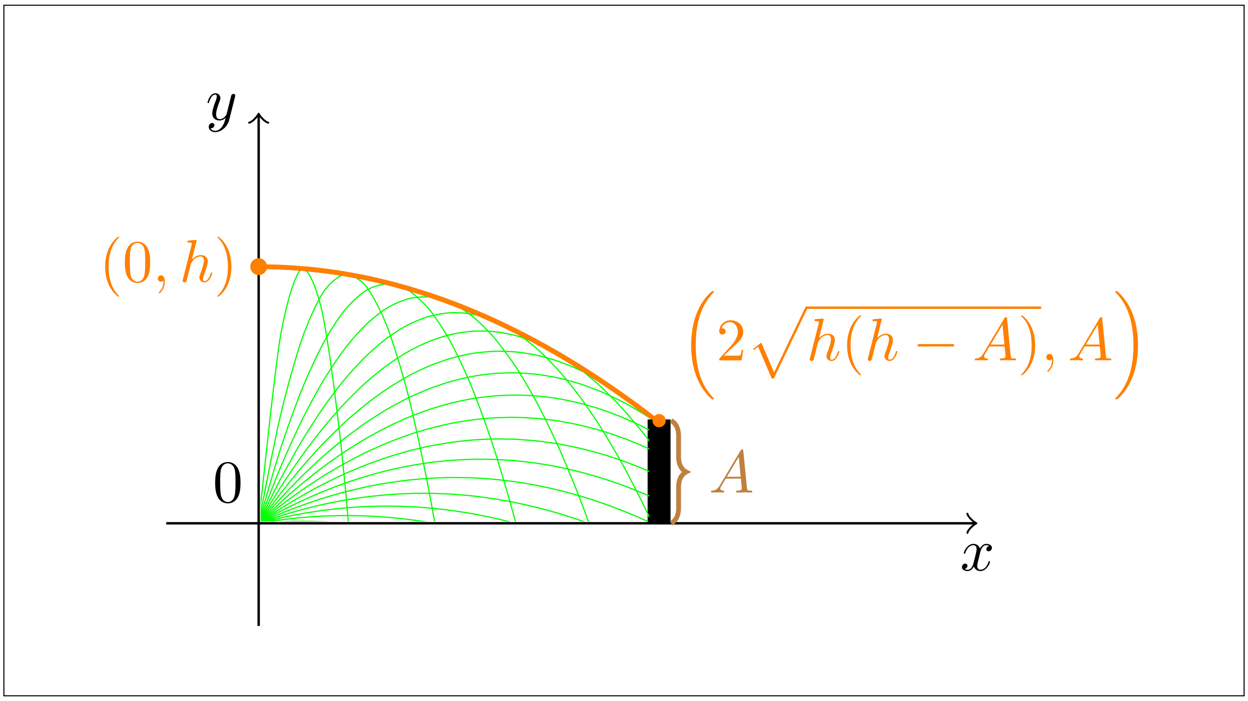


FIGURE 13.11 – La cible est en hauteur.

Leur portée horizontale sera

$$x_f = 2\sqrt{h(h-a)} \tag{13.44}$$

Et la distance entre la citadelle et leurs canons sera :

$$d = 2h - A \tag{13.45}$$

6 Avec les frottements

Dans tous les raisonnements effectués ici les frottements ont été négligés. S'il faut en tenir compte, les équations horaires deviennent beaucoup plus lourdes et il devient très difficile [3] d'éliminer le temps pour obtenir obtenir une équation de trajectoire indépendante du temps. On doit se contenter des équations horaires qui sont alors des équations paramétriques en "t" et utiliser des méthodes numériques pour estimer la trajectoire. Ceci demande de la "puissance de calcul" sur ordinateur.

7 Exercices

1. Depuis une fenêtre à 3 m de haut, on lance trois fois de suite une même balle avec une même vitesse de $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

   Pour chaque cas, déterminez le temps nécessaire pour que la balle arrive au sol.

   (a) La première fois, on lance la balle vers le bas,
   0,6 s

   (b) la deuxième vers l'avant,
   0,77 s

   (c) la troisième fois vers le haut.
   1 s

2. Un obus est lancé à l'horizontale avec une vitesse de $350\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ depuis le sommet d'une falaise de 90 m de haut.

   (a) Après combien de temps arrive t' il au sol ?
   4,3 s

   (b) À quelle distance du pied de la falaise se situera l'impact ?
   1500 m

   (c) Avec quelle vitesse frappe t' il le sol ?
   $353\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

   (d) Quelle est l'équation de la trajectoire ?
   $y = 90 - 0,00004x^2$

3. On lance un projectile avec une vitesse de $300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La direction du lancer est de 30^0 avec l'horizontale.

   (a) A quelle distance du point de départ le projectile retombe t' il au sol ?
   7794,21 m

   (b) Jusqu'à quelle altitude l'objet est il monté ?
   1125 m

   (c) Quelle est l'équation de la trajectoire ?
   $y = 0,58x - 0,00007x^2$

4. Quelle est l'inclinaison qu'il faut donner à d'un canon qui lance un obus avec une vitesse de $400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ si la cible est 5000 m plus loin ?
   9^0

5. Un singe en peluche (Nous avons eu quelques réclamations suite au traitement infligé à Cheeta !) est à 1 m de haut et à 1,5 m d'un fusil à fléchette pointant vers l'animal. La vitesse

3. Voire même impossible !

de ma fléchette est de $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Un système automatique libère la peluche qui chute alors dès l'instant du départ de la fléchette.

La fléchette va t' elle atteindre sa cible ? (Justifiez.)
Oui

6. On fait lance une balle dans un anneau situé 7 m du lanceur et 1 m au dessus du point de départ de la balle. La balle monte, passe dans l'anneau et commence alors à descendre.

   Quelles étaient la vitesse initiale et l'angle de tir de la balle ?
   $\alpha = 15,93^0$, $v_0 = 16{,}28\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

7. On lance un objet avec une vitesse de $54\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Peut-on atteindre un objet qui est à 3 m de haut et situé à 20 m à l'horizontale du lanceur ? Justifiez
   NON

Chapitre 14

Mouvements à trois dimensions

Sommaire

Introduction

Nous avons décrit des mouvements :
— rectilignes, c'est à dire à une dimension (MRU, MRUA),
— dans le plan, c'est-à-dire à deux dimensions (MCU, MCUA, tir horizontal, tir oblique).

Mais les mouvements que nous connaissons au quotidien se déroulent dans un espace euclidien à trois dimensions.

Nous nous limiterons à quelques exemples. Nous allons discuter ici de la manière de les décrire en mécanique.

1 Coordonnées et vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

Considérons le cas d'un système de référence cartésien dans $\mathbb{R}^3$.

Les coordonnées d'un point P quelconque dans ce système seront (P_x, P_y, P_z).

De même, tout vecteur flottant $\overrightarrow{AB}$ peut être vu comme le représentant d'un vecteur $\overrightarrow{OP}$ partant de l'origine O du système et se terminant en un point P. Si les $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont de même direction, de même sens et de même norme, ils seront donc bien deux vecteurs égaux.

Les coordonnées du point P détermineront le vecteur $\overrightarrow{OP}$.

$$\overrightarrow{OP} \equiv \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \tag{14.1}$$

2 Équations paramétriques

Nous avons vu que, dans le plan, la trajectoire pouvait être écrite comme une équation cartésienne indépendante du temps.

Dans l'espace, une équation décrit un plan ou, de manière plus générale, une surface. Pour décrire une courbe, on peut utiliser *des* équations *paramétriques* mais plus une "*simple*" équation.

A Équations de droites

Pour avoir une représentation des droites dans l'espace, on peut avoir recourt à des vecteurs.

Nous nous limiterons à cette méthode de représentation des droites.

Une droite sera représentée par la somme d'un vecteur partant de l'origine jusqu'à un point P de la droite et d'un autre vecteur $\overrightarrow{PQ}$ reliant deux points de la droite. Un paramètre t (ou λ ou m ou ...) multiplie le vecteur de la droite. En faisant varier ce paramètre on pourra atteindre tous les points S de la droite.

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} \tag{14.2}$$

En mathématique, on parle de la "méthode des vecteurs directeurs".

B Généralisation

Pour décrire la position instantanée d'un point P par son vecteur position $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$, on donnera donc les composantes en x, y et z. Ces composantes seront des fonctions de t.

$$\vec{r}(t) \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} r_x(t) & = & f_1(t) \\ r_y(t) & = & f_2(t) \\ r_z(t) & = & f_3(t) \end{array} \right. \tag{14.3}$$

3 Exemples

Nous illustrons ici notre propos par quelques exemples. Un figure illustre un mouvement et nous indiquons des équations correspondantes.

A Exemples généraux

a) Mouvement hélicoïdal simple

$$\left\{ \begin{array}{lcl} r_x(t) & = & R\cos(\omega t) \\ r_y(t) & = & R\sin(\omega t) \\ r_z(t) & = & kt \end{array} \right. \tag{14.4}$$

où
— ω, k et R sont des constantes.

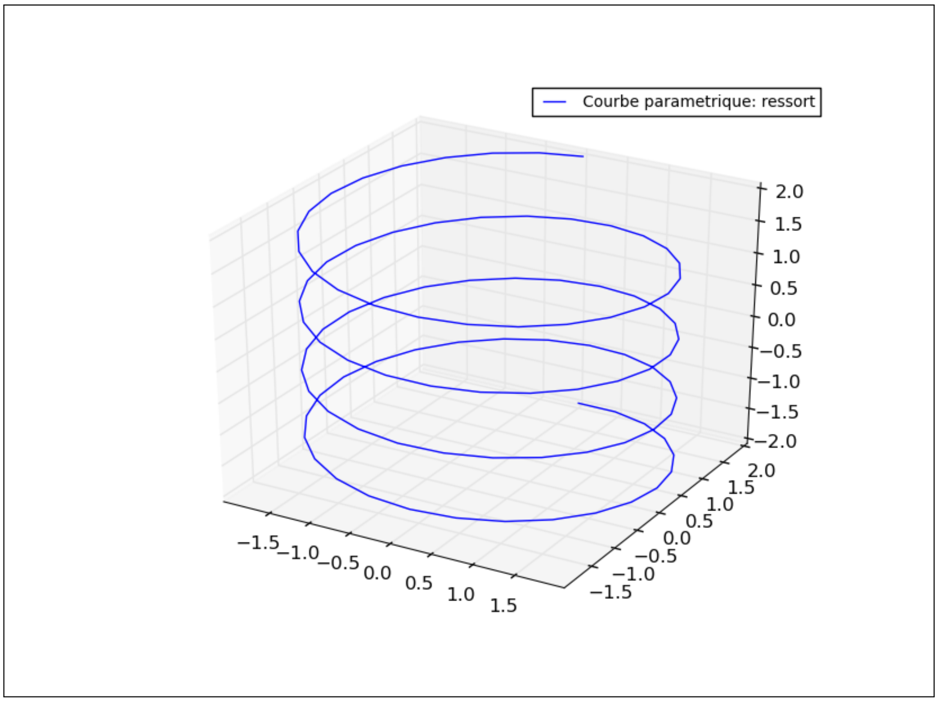


FIGURE 14.1 – Mouvement hélicoïdal simple.

b) "Tornade"

$$\left\{ \begin{array}{lcl} r_x(t) & = & R(t^2+1)\cos(\omega t) \\ r_y(t) & = & R(t^2+1)\sin(\omega t) \\ r_z(t) & = & kt \end{array} \right. \tag{14.5}$$

où
— ω, k et R sont des constantes.

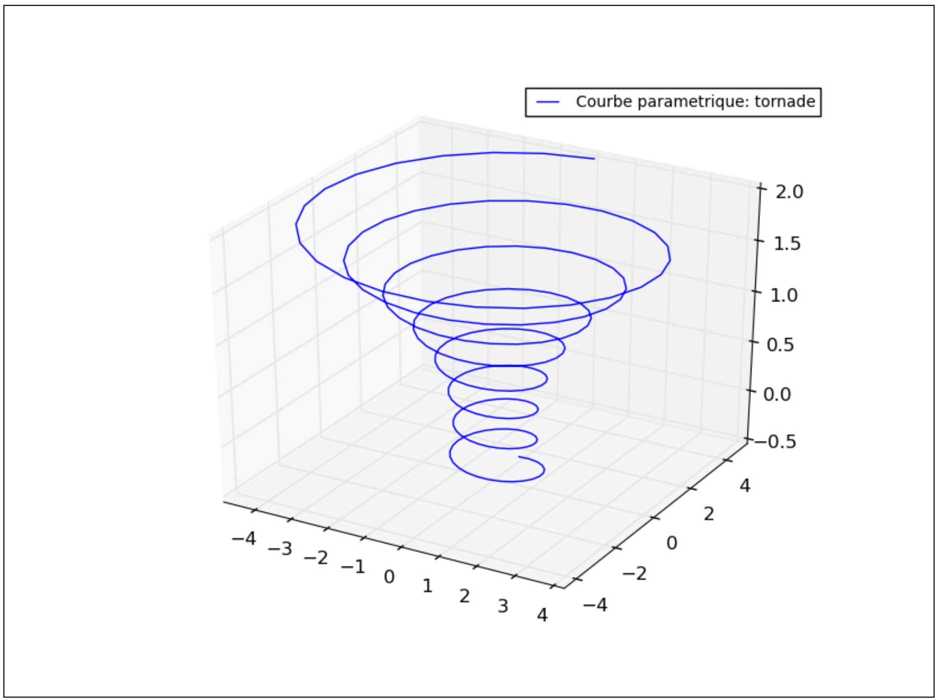


FIGURE 14.2 – Une tornade.

c) Spirale à la surface d'une sphère

$$\begin{cases} r_x(t) &= R\sin(\theta t)\cos(\omega t) \\ r_y(t) &= R\sin(\theta t)\sin(\omega t) \\ r_z(t) &= k\cos(\theta t) \end{cases} \tag{14.6}$$

où

— ω, θ, k et R sont des constantes.

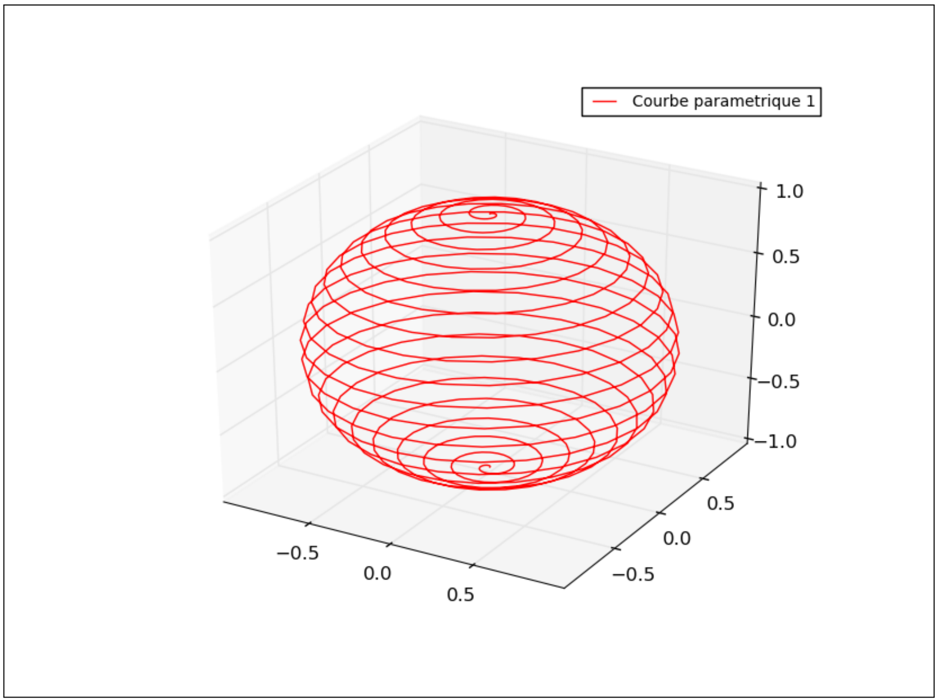


FIGURE 14.3 – Une spirale à la surface d'une sphère.

B Mécanique céleste

En mécanique céleste aussi les trajectoires des astres (et des objets lancés par l'homme dans l'espace) sont décrites par des courbes paramétriques.

Ainsi les orbites des planètes autour du Soleil sont des ellipses.

L'orbite de la Lune autour de la Terre est aussi une ellipse.

Mais ces deux ellipses ne sont pas dans un même plan. Le plan de l'orbite de la Terre autour du Soleil s'appelle l'écliptique.

La paramétrisation de la rotation de la Terre sur elle-même (en tenant compte de l'angle que son axe de rotation fait avec le plan de l'écliptique) et la mise en équations de l'orbite de la Terre autour du soleil permettent d'expliquer la variation de la longueur du jour au cours de l'année.

Pour expliquer et prévoir les éclipses, ainsi que les lieux où elles seront observables sur Terre, il faut écrire les équations paramétriques de ces différents mouvements.

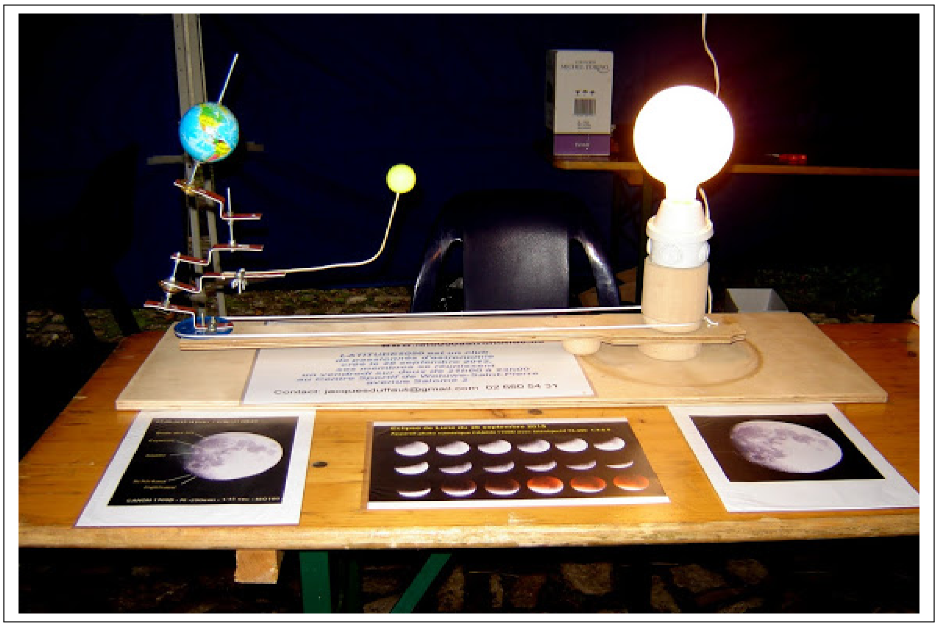


FIGURE 14.4 – Une maquette pour expliquer les éclipses.

Quatrième partie

Statique

Chapitre 15

Les forces

Sommaire

Introduction

Nous avons déjà fait connaissance avec les forces. Nous savons qu'elles peuvent s'équilibrer ou que si elles s'exercent sur une surface, il faut parler de pression.

1 Définitions et caractéristiques

Définition 31 (Force)**.** Une force est toute cause capable de provoquer une déformation ou de modifier la trajectoire ou la vitesse d'un objet.

Elle caractérisée par :

— une direction : dans laquelle elle exerce ses effets (du point de vue des mathématiques, une direction est une famille de droites parallèles),

— un sens : 2 sens pour une direction,

— un point d'application : où s'applique la force (nous devrons garder à l'esprit le point de vue des mathématiques où un vecteur peut avoir de multiple représentants),

— une intensité : qui exprime la grandeur.

Unité : L'unité d'intensité pour la force est le *newton* (N), qui correspond à l'intensité avec laquelle la Terre attire un corps de masse d'environ 101,9 g.

Une force est une grandeur physique orientée, on la **représente** par un vecteur , le vecteur $\overrightarrow{F}$.

— Son origine est le point d'application de la force.

— La direction est indiquée par son inclinaison.

— Le sens est indiqué par la pointe de la flèche.

— L'intensité de la force est indiquée par la longueur du vecteur.

Remarque : On notera une force sous forme vectorielle $\overrightarrow{F}$ ou scalaire F selon les besoins.

A Mesure des forces

L'**instrument de mesure** des forces est le dynamomètre, basé sur la déformation d'un ressort.

B Loi des ressorts

La mesure des forces est basée sur la loi de Hooke. Nous nous limiterons à sa version concernant les ressorts. Les forces seront toujours dans l'axe des ressorts. Tous les cas envisagés ici seront donc à une dimension. Nous pourrons donc éventuellement écrire les forces sans la "flèche" des vecteurs.

Loi 1 (de Hooke)**.** *Si une force extérieure F_{ext} est exercée sur un ressort, celui va se déformer et, à l'équilibre, exercer une force intérieure F_{int} égale et opposée à cette déformation causée par la force extérieure.*

Ces deux forces seront proportionnelles à la déformation et dépendront en grandeur de la géométrie et du matériau du ressort.

$$F_{ext} = k \cdot \delta l \tag{15.1}$$

où

— F_{ext} = *la force extérieure à mesurer* (N)*,*

— k = *la constante de raideur du ressort (dépend de la géométrie et du matériau du ressort)* (N m^{-1})*,*

— $\delta l = l_F - l_0$ = *la déformation du ressort* (m)

  — l_0 = *longueur du ressort au repos* (m)

  — l_F = *longueur du ressort déformé* (m)

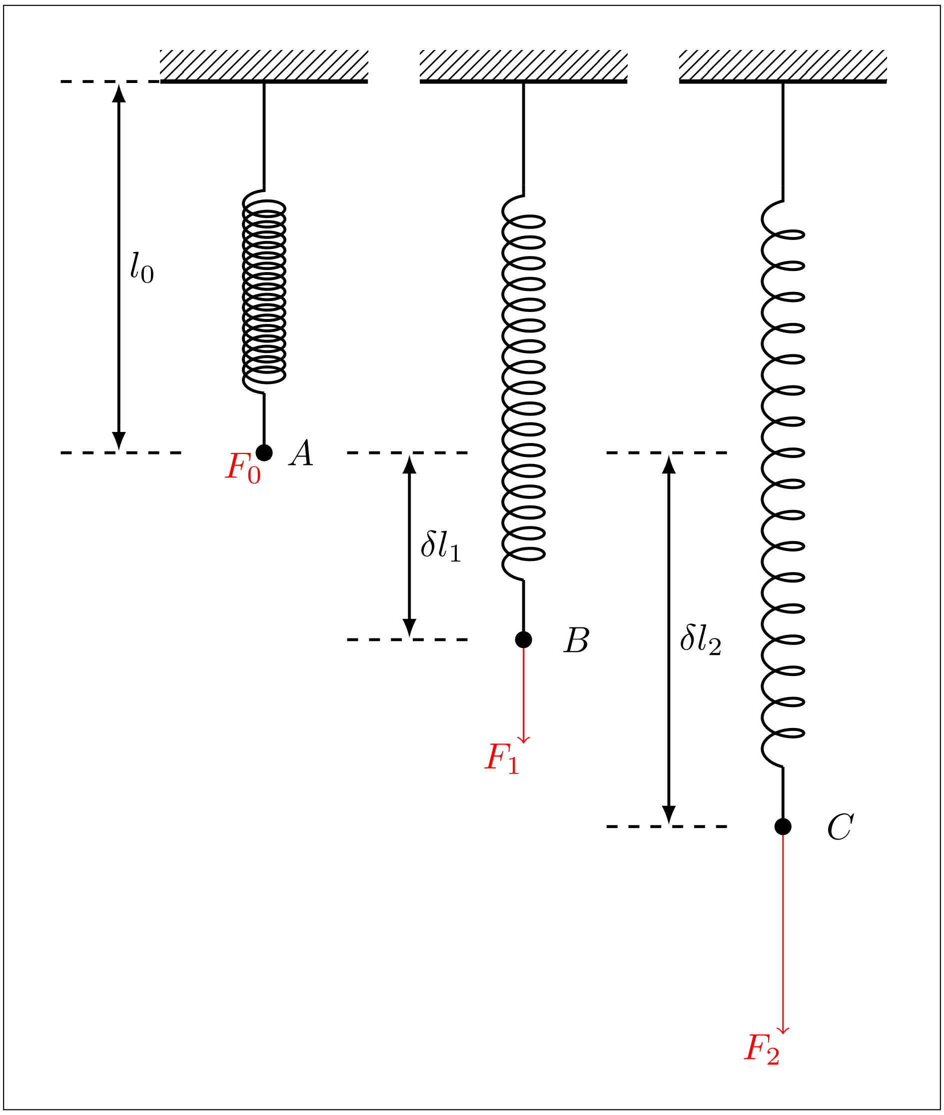


FIGURE 15.1 – La loi des ressorts : $F_0 = 0$ et $F_1/\delta l_1 = F_2/\delta l_2$.

2 La force de pesanteur

On appelle le **poids** d'un corps, la force qui attire le corps vers le centre de la terre.

A Les caractéristiques de la force de pesanteur

Les caractéristiques de la force de pesanteur sont :

— direction : verticale (toutes les verticales convergent au centre de la terre),
— sens : vers le centre de la terre,
— point d'application : le centre de gravité du corps,
— intensité : le poids du corps.

Remarque : le poids du corps varie en fonction de la **masse** du corps et de la **distance** qui le sépare du centre de la terre.

Nous représenterons le vecteur force-poids par la lettre "$\overrightarrow{G}$"

B Différences entre masse et poids

Masse	Poids
~ à la qté. de matière	Force avec laquelle le corps est attiré par la planète
grandeur scalaire	grandeur vectorielle
grandeur constante	grandeur variable
unité = kg	Newton
instrument de mesure : la balance	le dynamomètre

Un corps de masse 1 kg pèse
— 274 N sur le Soleil
— 1,6 N sur le Lune
— 11 N sur Saturne
— 9,81 sur Terre
— 3,5 N sur Mercure

Le **poids** d'un corps dépend de sa **masse** et de l'**astre** (planète, lune, étoile) où il se trouve. La Terre attire un corps d'**1 kg de masse** avec une force de **9,81 N**.

Tableau à compléter :

.	Terre	Lune	Mars	Jupiter
Le corps est	6X + lourd que sur la lune	6X + léger que sur Terre	2X + lourd que sur la Lune	2,6X + lourd que sur la Terre
			3X + léger que sur Terre	
poids (N)	1000 N	166,6 N	333,3 N	2600 N
masse (kg)	101,9 kg	101,9 kg	101,9 kg	101,9 kg

3 Autres forces

A Forces électrostatique

Faisons quelques expériences rapides en frottant verre, ambre et plastique avec des fibres diverses (soie, laine, peau de chat ...).

Nous pouvons alors attirer des petits morceaux de papier, faire dévier un filet d'eau, ...

Nous voyons que dans certains cas, il y a attraction, dans d'autre répulsion.

a) Note historique

Les grecs signalaient déjà l'existence de forces électrostatiques sans les comprendre.
elektron = ambre

b) A retenir

— Les charges électriques sont de 2 espèces :
  * soit positives : verre frotté avec un drap,
  * soit négatives : plastique ou ambre frotté avec une peau ou de la laine.

— Les charges électriques exercent des forces entre elles :

  - ✻ Si les charges sont de même signe, elles se repoussent.
  - ✻ Si les charges sont de signes opposés, elles s'attirent.
- — Un corps initialement neutre, amené au contact d'un corps électrisé prend une charge de même signe que celle de ce corps.
- — Les charges portées par les corps électrisés ont leur origine dans les atomes : un atome peut céder ou recevoir des électrons.
  - ✻ S'il en cède, il se charge positivement.
  - ✻ S'il en acquiert, il se charge négativement.
- — Dans un isolant, les électrons circulent difficilement. Dans un conducteur au contraire, ils circulent facilement.
- — Un isolant comme l'ébonite, le plastique, le verre ou l'ambre, s'il est frotté, s'électrise. C'est-à-dire que l'on fait apparaître des charges électriques sur les parties frottées.
- — Un conducteur ne peut être électrisé que s'il est tenu par un isolant.

B La force magnétique

Les aimants peuvent aussi s'attirer ou se repousser selon le pôle :
- — Il existe des pôles sud et nord ;
- — les pôles opposés s'attirent. Les pôles identiques se repoussent.

Il s'agit ici des forces magnétiques (magnétostatiques exactement).

C La force électromagnétique

Les forces électriques et magnétiques sont une seule et même chose : la force électromagnétique. C'est cette force qui nous permet d'expliquer le fonctionnement des moteurs électriques, des génératrices mais aussi les aurores boréales ou les transmissions radios.

D Les forces de frottement

Nous connaissons tous les frottements. Dans un bon vélo, dans une voiture et dans tous les moteurs en général, on cherche à les éliminer. Ces forces, omniprésentes, sont de nature chimique. C'est à dire qu'elles découlent aussi des forces électromagnétiques.

E Les forces fondamentales

Toutes les forces que nous connaissons dérivent de la gravité, de la force électromagnétique, de la force faible et de la force forte. Ces deux dernières agissent au niveau subatomique (noyau, particules élémentaires ...) et nous n'en parlerons pas ici.

4 Additions de forces

On parle aussi de composition de forces. Comme les forces sont des grandeurs vectorielles, les règles d'addition des vecteurs sont applicables.

A En pratique : Méthodes

Les deux premières méthodes sont purement graphiques.

a) Le parallélogramme de forces

Si le nombre de forces a additionner est petit (idéalement seulement 2), on peut utiliser la méthode dite du "parallélogramme".

Les deux forces sont placées avec un point de départ commun. Ce point de départ sera aussi le point de départ du vecteur résultant. On trace alors les parallèles aux deux forces passant par leur extrémités.

Le point d'intersection des deux parallèles est choisi comme point d'arrivée du vecteur résultant.

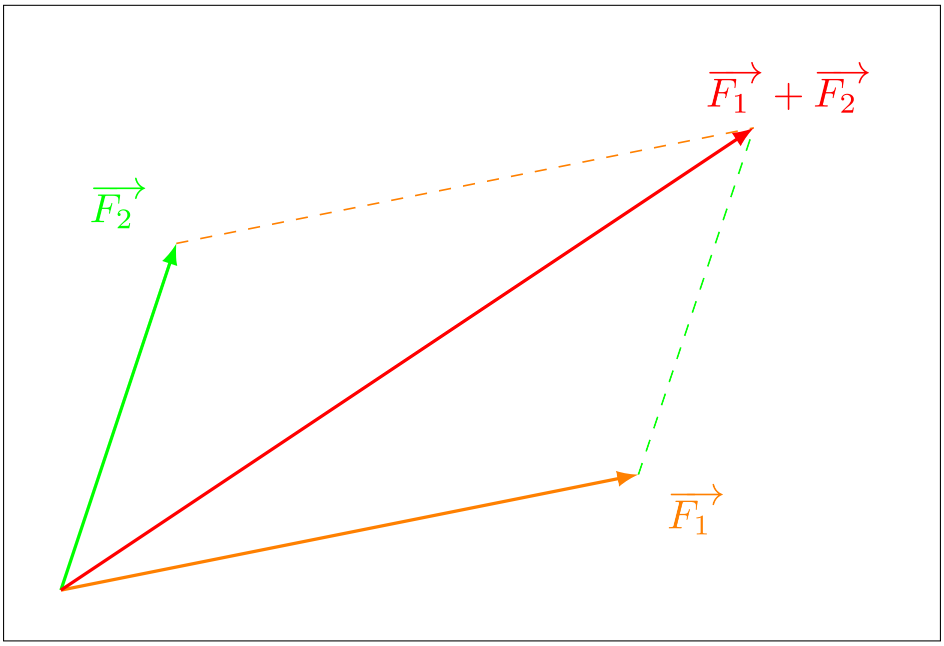


FIGURE 15.2 – La méthode du parallélogramme de forces.

Le vecteur résultant est donc une diagonale du parallélogramme.

b) Le polygone des forces

Dès que le nombre de forces augmente, il vaut mieux utiliser la méthode dite du "polygone des forces". En terme d'algèbre vectorielle, ceci doit vous rappeler la loi de Chasles. Nous exploitons le fait que les forces sont des vecteurs "représentants" de vecteurs libres qui peuvent être placés à volonté par translation.

Le point de départ de chaque vecteur successif est placé au point d'arrivée du précédent. En reliant le point de départ du premier vecteur au point d'arrivée du dernier vecteur, on représente le vecteur résultant de la somme de toutes les forces en jeu.

Comme l'addition des vecteurs est commutative, l'ordre n'est pas important.

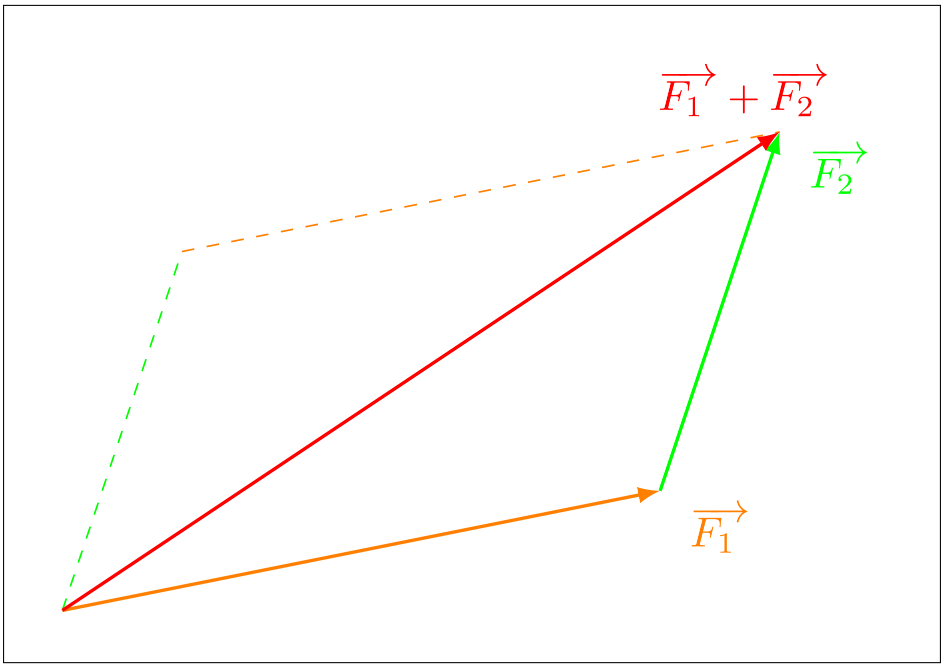


FIGURE 15.3 – La méthode du polygone de forces.

c) Composantes

Si, dans un repère (que nous prendrons orthonormé mais ce n'est pas obligatoire), les coordonnées des vecteurs sont connues, il suffit d'additionner les coordonnées dans chacune des directions de l'espace.

5 Exercices

Chapitre 16

Les forces : équilibres de translation

Sommaire

Introduction

Nous allons étudier la condition d'équilibre statique d'un corps. Nous nous limiterons ici à des forces concourantes.

1 Énoncé du principe

Pour qu'un objet soit immobile, la somme des forces qui s' exercent sur cet objet doit être nulle.

Loi 2 (Loi d'équilibre statique des forces)**.**

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0} \tag{16.1}$$

2 En pratique : Méthodes

Supposons que (n-1) forces soient connues, comment déterminer la nième force qui va faire en sorte que la somme de toutes les forces soit nulle ?

Il faut additionner toutes les (n-1) forces connues et trouver ainsi leur résultante. La nième force doit être égale et opposée à cette résultante.

$$\overrightarrow{F_n} = -\sum_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{F_i} \tag{16.2}$$

A Parallélogramme

Si on connaît deux forces et si nous désirons déterminer la troisième force qui fera que la somme des trois forces sera nulle, il faut suivre la procédure suivante :

— Additionner les deux premières forces par la méthode du parallélogramme (on obtient ainsi la résultante) ;
— tracer, à partir du point d'application, un vecteur de même direction, de même "longueur" mais de sens opposé à la résultante ;
— ce dernier vecteur est la troisième force cherchée.

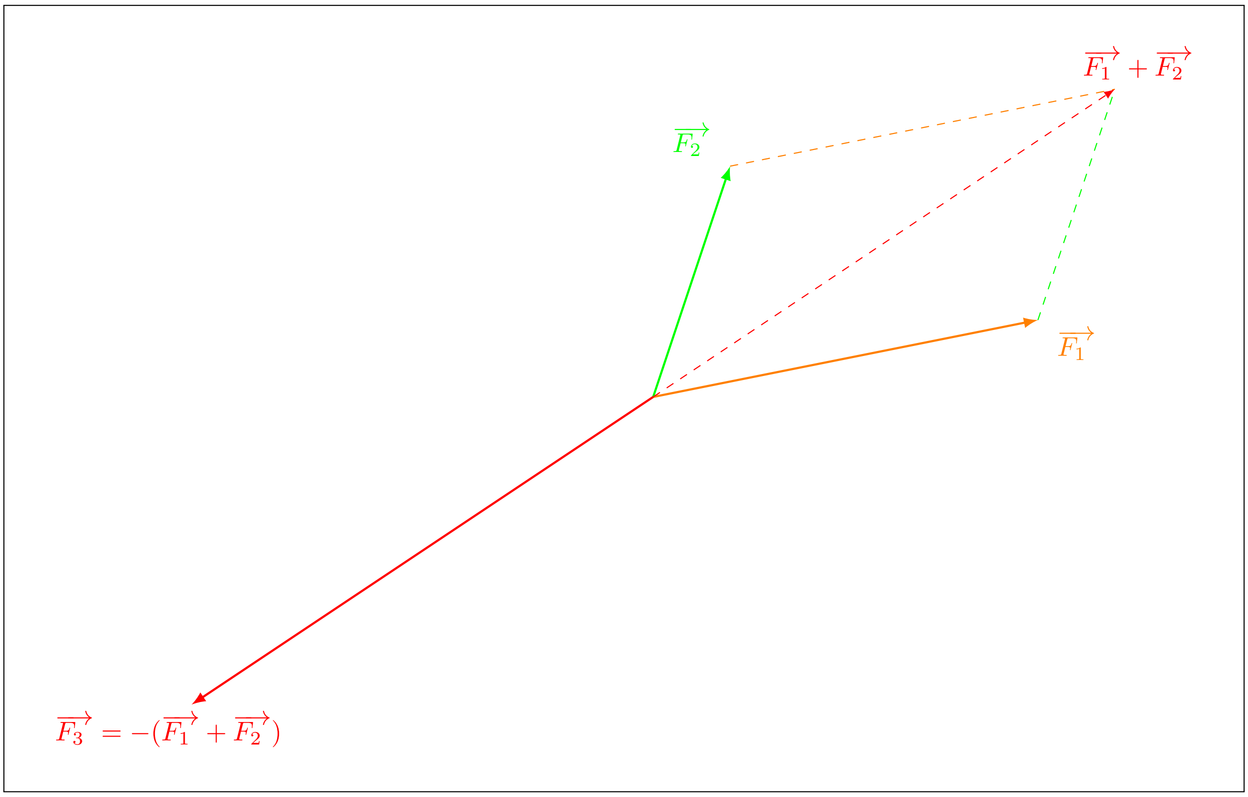


FIGURE 16.1 – La méthode du parallélogramme de forces.

B Polygone

S'il y a plus que deux forces. Il faut les additionner par la méthode du polygone, tracer la résultante. La "nième" force cherchée sera le vecteur égal et opposé à la résultante.

Si la même méthode est appliquée pour trouver la force à opposer à deux premières forces, on parle de "triangles des forces".

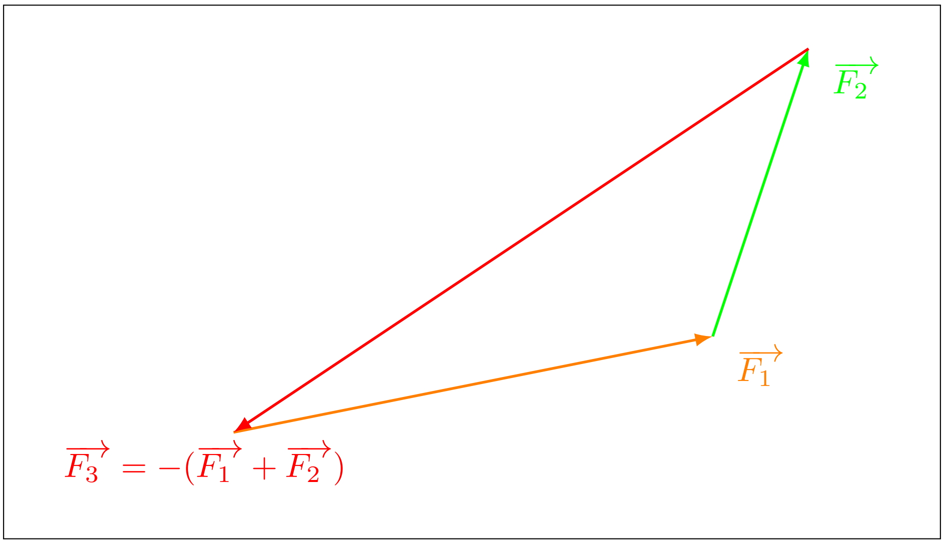


FIGURE 16.2 – Le triangle des forces.

C Composantes

Si on travaille dans un repère (nous le choisirons orthonormé mais ce n'est pas obligatoire), on peut travailler avec les composantes.

Les composantes du vecteur cherché sont les opposés des sommes des composantes de tous les autres vecteurs.

$$\begin{cases} F_{nx} = -\sum_{i=1}^{n-1} F_{ix} \\ F_{ny} = -\sum_{i=1}^{n-1} F_{iy} \\ F_{nz} = -\sum_{i=1}^{n-1} F_{iz} \end{cases} \tag{16.3}$$

D Exemples

3 La résistance

Si nous sautons du haut d'un mur au sol, seule la force poids due à la gravité s'exerce sur nous (pour autant que nous négligions les frottements) et nous met en mouvement.

Lorsque nous sommes debout sur le plancher, nous subissons la gravité et donc la force poids. Pourtant nous sommes immobiles et ne nous déformons pas. Tout se passe donc comme si les forces s'exerçant sur nous étaient à l'équilibre !

C'est parce qu'une autre force est en jeu : la "*résistance*".

La résistance est une force exercée par les surfaces avec lesquelles un objet est en contact. La résistance est perpendiculaire à la surface et s'oppose à la force qui agit sur la surface (dans notre exemple à notre poids).

C'est la résistance qui nous donne la sensation d'être "pesant". La sensation de "flottement" que nous éprouvons dans un ascenseur qui descend très vite, lorsque nous plongeons est la même que celle des cosmonautes. En fait nous sommes alors en chute libre !

Si notre poids est perpendiculaire à la surface, la résistance aura la même direction, la même valeur en newton mais sera de sens opposé !

4 Le plan incliné

Le plan incliné permet de faire monter des objets d'une certaine hauteur. Il est plus facile de monter un escalier ou une rampe que d'escalader un mur vertical.

A Caveat

Le cas du plan incliné est donné à titre d'exemple. Le traitement présenté ici n'est pas une "recette" à suivre avec des formules qui "marchent" toujours. Il s'agit d'une démarche typique qui doit être imitée mais pas copiée littéralement.

Ce sont plutôt le plan et les étapes du traitement qui sont intéressants.

B Identifier les forces en présence

Si un corps est sur un plan incliné, il y a trois forces en présence :

- son poids $\overrightarrow{G}$ (direction : verticale, sens : vers le bas, norme : $m.g$),
- la résistance du plan incliné $\overrightarrow{R}$ (direction : perpendiculaire à la surface du plan, sens : vers l'extérieur du plan, norme : à priori inconnue),
- et une force de retenue $\overrightarrow{F}$ (souvent les frottements ou une tension dans un câble) (direction : parallèle au plan, sens : "vers le haut", norme : à priori inconnue mais éventuellement mesurable).

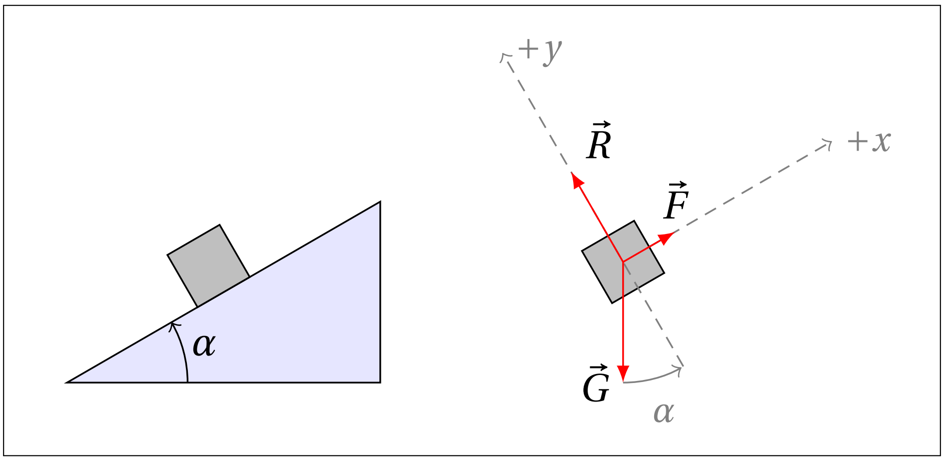


FIGURE 16.3 – Le plan incliné et les forces en présence

C Déterminer les forces en présence

Comme nous sommes à l'équilibre, les forces doivent s'annuler et la méthode du polygone de forces (ici un triangle de forces) doit pouvoir s'appliquer.

Il faut fixer une échelle, puis d'abord tracer un vecteur vertical $\overrightarrow{G}$ dirigé vers le bas dont la longueur correspond à la valeur du poids .

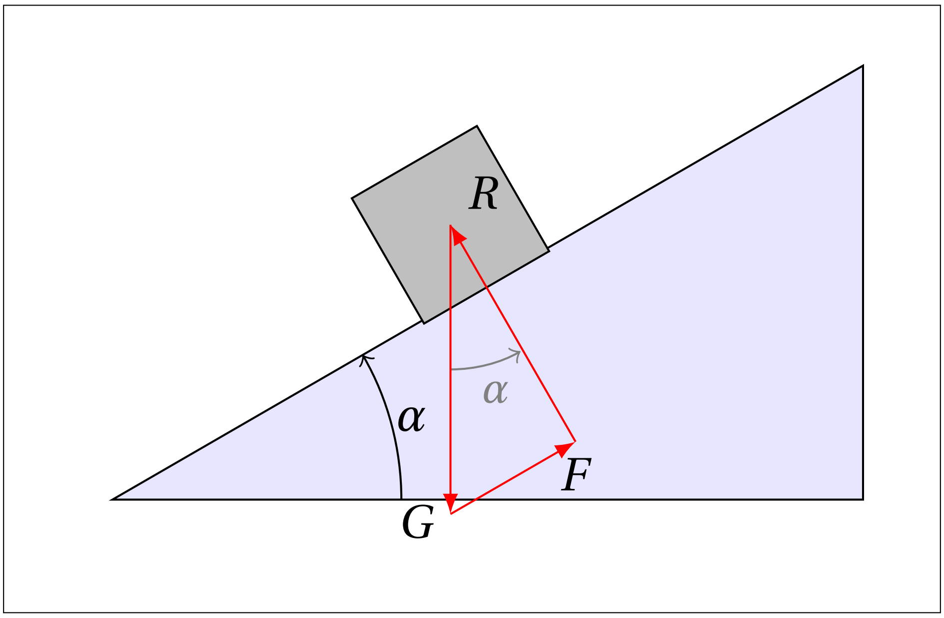


FIGURE 16.4 – Triangle de forces et plan incliné.

Ensuite, il faut tracer une demi-droite partant de l'extrémité du vecteur poids, parallèle à la surface du plan incliné et dirigée vers le haut du plan incliné (Ceci correspond à la direction et au sens de la force de retenue $\overrightarrow{F}$).

Puis, partant du début du vecteur poids, il faut tracer une demi-droite dont la direction est perpendiculaire au plan et dirigée vers le bas (La résistance $\overrightarrow{R}$ aura son extrémité à l'origine de cette demi-droite).

L'intersection des deux demi-droites fixe les extrémités des vecteurs $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{R}$

D Point de vue analytique

Comme la figure 16.4 (p. 149) le laisse entendre, $\overrightarrow{G}$ est l' hypoténuse d'un triangle rectangle dont $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{F}$ sont les côtés.

Dès lors nous pouvons appliquer les relations d'angle dans les triangles rectangles.

$$\begin{cases} R = G\cos\alpha \\ F = G\sin\alpha \end{cases} \tag{16.4}$$

Ce qui entraîne immédiatement :

$$\tan\alpha = \frac{F}{R} \tag{16.5}$$

a) Force parallèle et normale

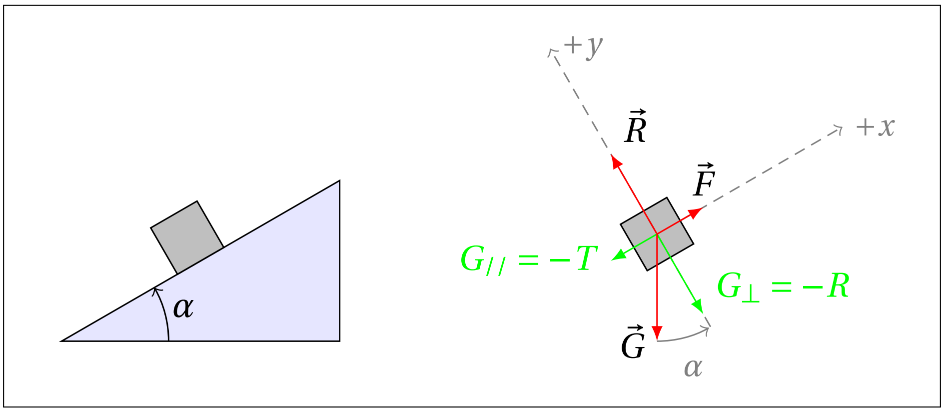


FIGURE 16.5 – Le plan incliné et les forces en présence.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 16.5 (p. 150) , la force poids peut être décomposée en une force $G_{//}$ parallèle au plan incliné qui est égale à $-F$ et une force $G_{\perp}$ perpendiculaire au plan incliné qui est égale à $-R$.

E Marche à suivre

La marche à suivre pour résoudre des problèmes d'équilibre statique peut donc se résumer ainsi :

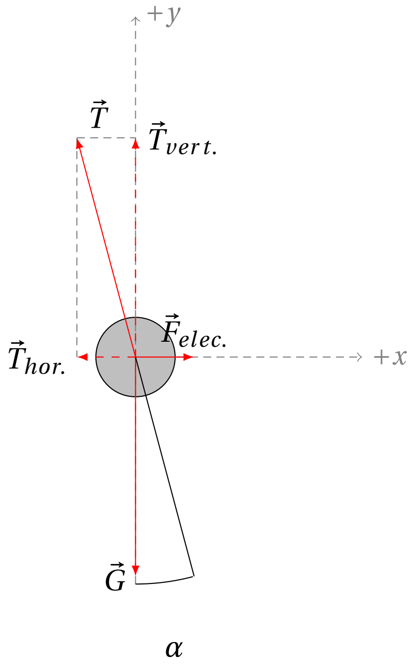
1. Faire un schéma complet (avec les surfaces, les angles, les forces ...) de la situation ;
2. représenter les forces sur le schéma en étant attentif aux angles ;
3. représenter les forces seules avec les mêmes orientations que sur le schéma global ;
4. chercher à transposer le schéma dans un triangle rectangle (ce n'est pas toujours possible) avec des forces orientées
   — une à la verticale,
   — l'autre à l'horizontale
   — et une troisième selon l'hypoténuse,
   bien identifier les angles (éventuellement les complémentaires de ceux donnés) ;
5. à partir du dernier schéma déduire des relations trigonométriques.

5 Exercices

Pour tous les exercices d'équilibre de forces du type "équilibre de translation", il faut toujours établir des correspondances entre triangles semblables. Un premier triangle correspondant à la géométrie du problème va permettre de construire un deuxième triangle qui sera le triangles des forces.

1. Un morceau de bouchon en liège de 0,1 g est suspendu à un fin fil . Un tube en PVC frotté à un pull exerce une force électrique sur le morceau de bouchon. Et à l' équilibre , lorsque le tube est à la même hauteur que le morceau de bouchon, le fil forme un angle de 15 ° avec la verticale . Déterminez l' intensité de la force électrique .

   Solution :

   — Données :
     — $m = 0,1 = 0,0001 kg = 1 \cdot 10^{-4} kg$
     — $\alpha = 15^0$
   — Inconnue :
     — $F_{elec.} =?$
   — Formules :
     — $\overrightarrow{T} + \overrightarrow{G} + \overrightarrow{F_{elec.}} = \overrightarrow{0}$
     — $G = m \cdot g \, (g \simeq 10 m/s^2)$
   — Résolution :
     — $\overrightarrow{T_h} = -\overrightarrow{F}_{elec.}$ et $\overrightarrow{T_v} = -\overrightarrow{G}$
     — $T_h = T \cdot \sin\alpha$ et $T_v = T \cdot \cos\alpha$
     — $\Longrightarrow \tan\alpha = \dfrac{F_{elec.}}{G}$
     — $F_{elec.} = \tan\alpha \cdot G$
     — $F_{elec.} \simeq 0,27 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 2,7 \cdot 10^{-4} N$

2. Des militaires doivent traverser un ravin de 60 m de large. Ils tendent un câble d'un bord à l'autre. Lorsqu'un soldat de 75 kg est au milieu, le câble est détendu et s'abaisse de 2 m sous l'horizontale.
   (a) Quelle est la tension dans le câble ?
   (b) Quel est le coefficient de raideur du câble ?

Chapitre 17

Équilibres de rotation et moments de force

Sommaire

Introduction

Nous connaissons les conditions d'équilibre statique. Celles-ci sont applicables quand les forces sont concourantes. Mais qu'en est-il si les forces ne s'appliquent pas toutes au même endroit ?

La somme des forces peut donner l'impression d'être nulle. Mais, si les forces ne mettent pas l'objet en translation, elles peuvent le mettre en rotation.

1 Un peu d'histoire : Simon Stevin

La Belgique a joué un rôle dans les découvertes des sujets que nous allons traiter ici.

FIGURE 17.1 – Timbre de 1948 consacré à Simon Stevin à l'occasion des 400 ans de sa naissance.

Simon Stevin (1548-1620) est né à Bruges. On le décrit souvent comme un ingénieur. Ses travaux sur la mécanique ont amené des progrès en terme de machines simples. Il a étudié les leviers, les poutres, les plans inclinés, les machines hydrauliques ... Il fut précepteur du Prince héritier des Pays-Bas. On lui prête aussi la réalisation d' un char à voile !

FIGURE 17.2 – Un char à voile.

Nous utiliserons abondamment ses croquis pour illustrer ce chapitre.

2 Équilibre de rotation et leviers

A Observations

Si nous tenons une latte à une fraction de sa longueur et que, à ses extrémités, soit nous fixions des poids, soit nous exercions des forces, nous observons que la latte pivote sauf si certaines conditions sont remplies.

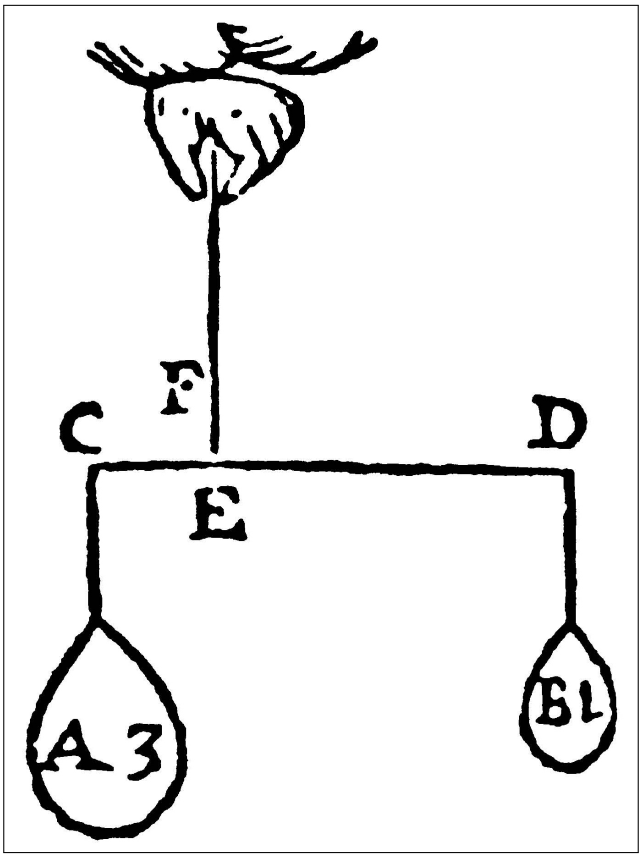


FIGURE 17.3 – Un premier équilibre selon Simon Stevin.

Pour fixer les idées, fixons une masse qui exercera par son poids une force résistance F_r et exerçons une force que nous appellerons la force motrice F_m. Le point autour duquel la latte peut pivoter sera nommé l'axe O.

La distance entre l'axe O le point où s'exerce la force motrice sera nommée la distance d_m. De même, la distance entre l'axe O le point où s'exerce la force résistante sera nommée la distance d_r.

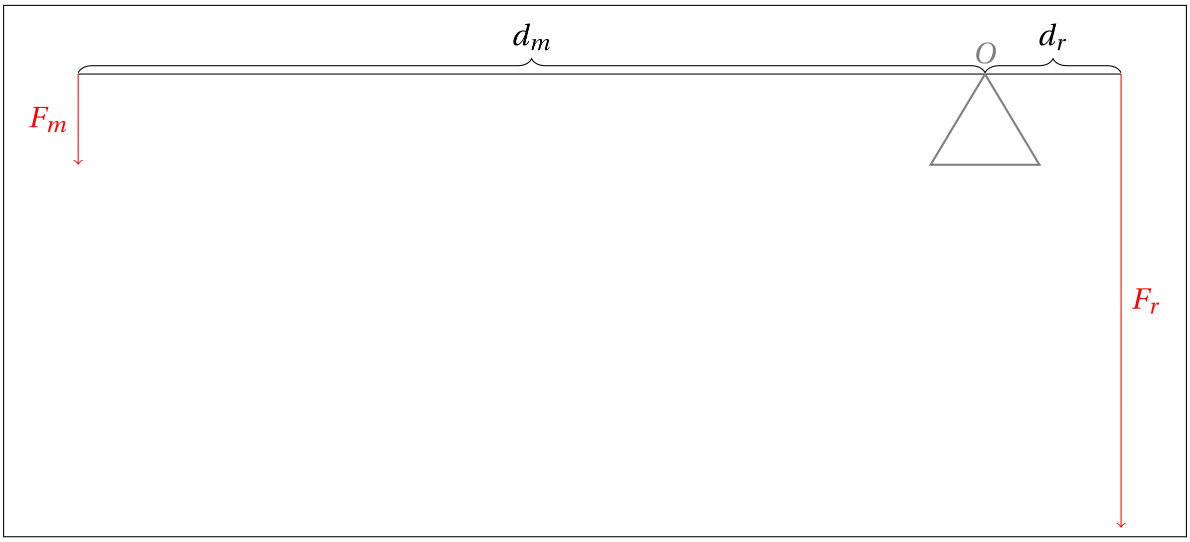


FIGURE 17.4 – Les forces et les distances dans la latte en équilibre.

Nous observons directement que la force du côté "court" doit toujours être plus grande que du côté "long".

Faisons varier les forces et les longueurs.

Essayons d'organiser nos observations sous forme d'un tableau. Indiquons-y les forces, leur rapport, les longueurs et les rapports entre les longueurs.

	F_m	F_r	F_m/F_r	d_m	d_r	d_m/d_r
	1	5	1/5	10	2	5

TABLE 17.1 – Comparaison des forces et des longueurs dans un levier.

B Déduction

Les rapports F_m/F_r et d_m/d_r sont inverses l'un de l'autre !

C Loi des leviers

Écrivons la relation découlant du point précédent.

$$\frac{F_m}{F_r} = \frac{d_r}{d_m} \tag{17.1}$$

Si nous transformons la relation précédente sous forme de produits (le produit des extrêmes est égal au produit des moyens) , nous trouvons une relation connue sous le nom de loi des leviers.

Loi 3 (Loi des leviers)**.**

$$d_m \cdot F_m = d_r \cdot F_r \tag{17.2}$$

où :

— *F_m est la force considérée comme motrice* (N)*;*
— *F_r est la force considérée comme résistante* (N)*;*
— *d_m est la distance entre l'axe de rotation et le point d'application de F_m* (m)*;*
— *d_r est la distance entre l'axe de rotation et le point d'application de F_r* (m)*.*

Attention : $F \perp d$.

a) Vocabulaire

Les distances d_m et d_r sont souvent appelées les *bras de levier*. Nous utiliserons désormais nous aussi ce terme.

b) F et d orthogonaux

Attention, dans les cas considérés jusque ici les forces et les leviers sont perpendiculaires. Lorsque ce ne sera plus le cas, nous insisterons sur le fait.

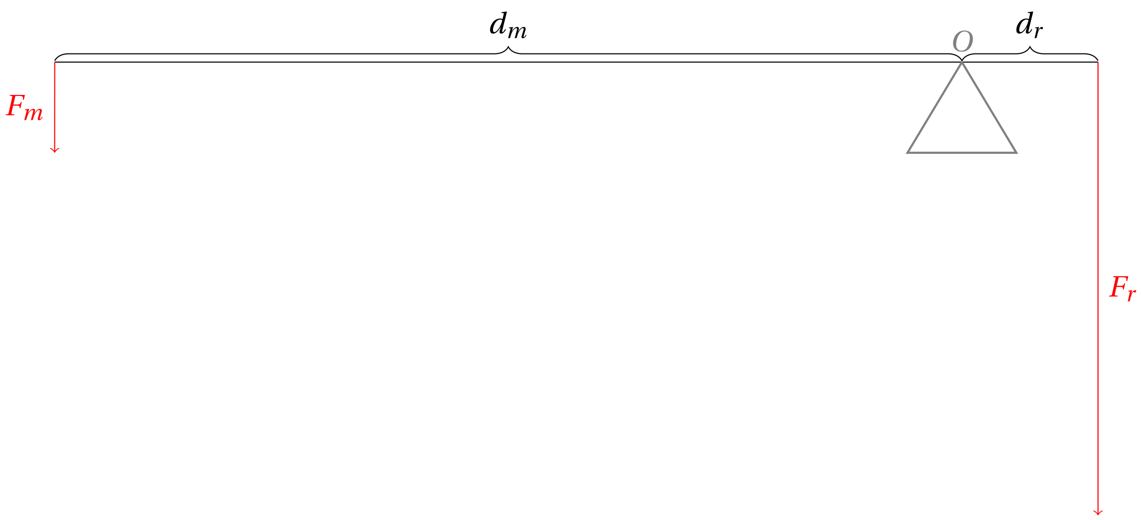
D Types de leviers

Il existe trois grands types de leviers. Nous allons ici les passer en revue. Pour chacun,

1. nous ferons un schéma général avec
   — une force motrice,
   — une force résistante,
   — un point d'appui,
   — les distances caractéristiques ;
2. nous verrons éventuellement la particularité de ce type de levier ;
3. nous donnerons quelques exemples.

a) Inter appui

1. schéma :

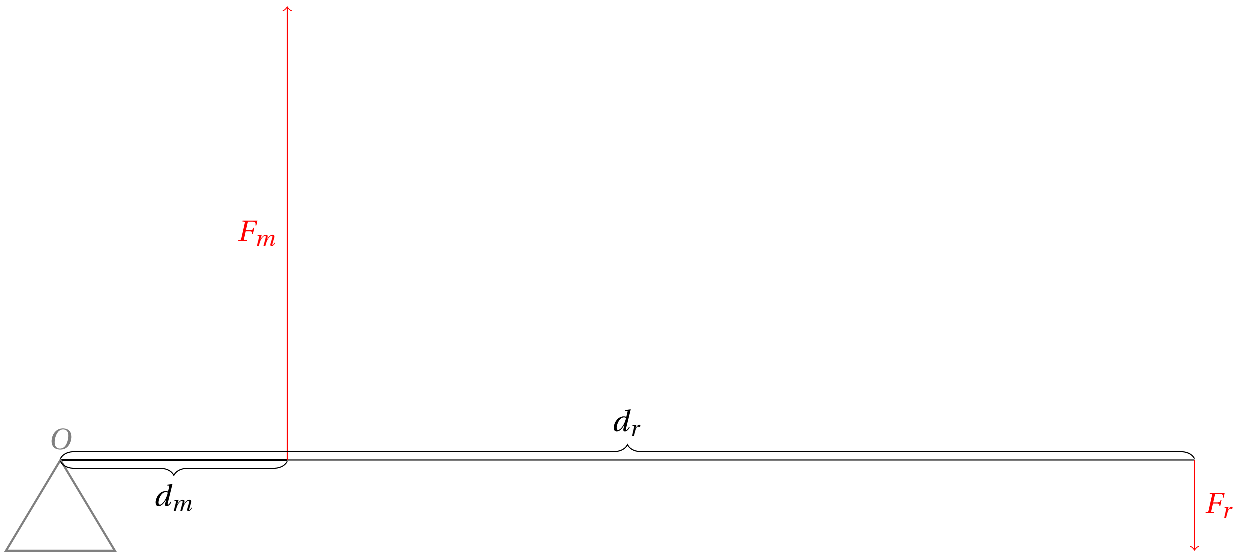


2. relation : $d_m \cdot F_m = d_r \cdot F_r$
3. particularité : selon rapport d_m / d_r

4. ex : ciseaux, pied de biche, tenaille, pinces ...

b) Inter moteur :

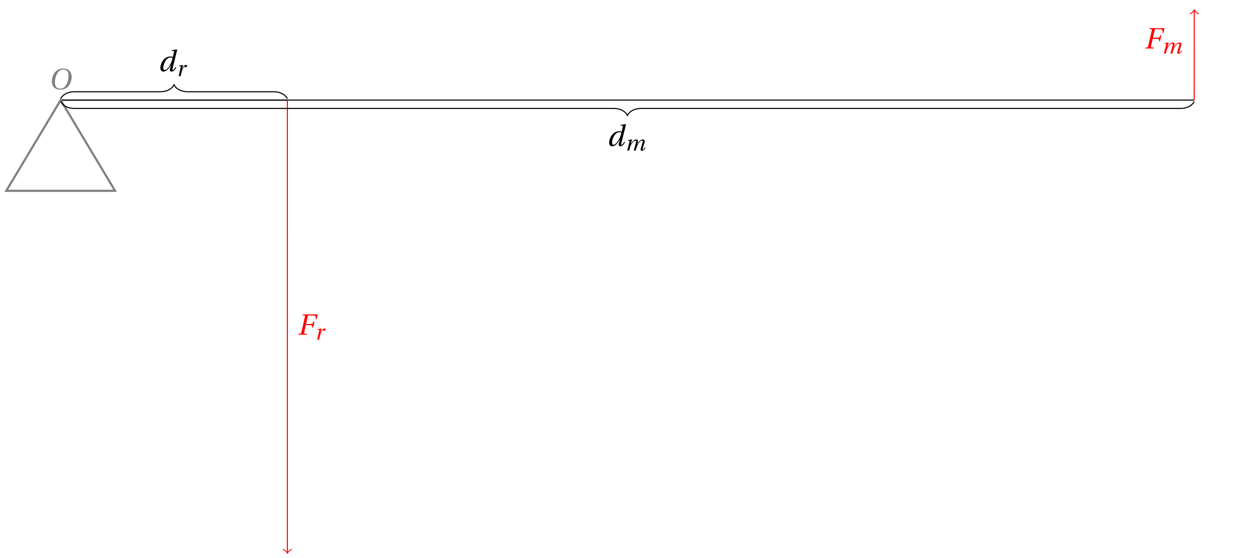
1. schéma :



2. relation : $d_m \cdot F_m = d_r \cdot F_r$
3. particularité : d_r fait toute la longueur du levier et le rapport $d_m < d_r$ implique $F_m > F_r$. Donc on a une amplification de l'amplitude du mouvement au prix d'une force motrice qui doit être grande.
4. ex : essuie-glaces, balais, muscles ...

c) Inter résistant :

1. schéma :



2. relation : $d_m \cdot F_m = d_r \cdot F_r$
3. particularité : d_m fait toute la longueur du levier et le rapport $d_m > d_r$ implique $F_m < F_r$. donc, on a une amplification de la force motrice au prix de l'amplitude du mouvement moteur qui doit être grand.
4. ex : casse-noisette, brouette ...

3 Moments de force

Les notions abordées avec les leviers peuvent être généralisées.

A Définition

Le produit de la valeur de la force et de la longueur du bras de levier est appelé la valeur du moment de force.

Définition 32 (Moment de force : valeur (absolue))**.**

$$M' = F \cdot d \tag{17.3}$$

où :
- M' = est la valeur (absolue) du moment de la force F par rapport au point d'appui (ou à l'axe de rotation) (N m) ou ($\mathrm{kg\,m^3\,s^{-2}}$),
- F = la force considérée (N) ou ($\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$),
- d = la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation (ou encore la longueur du bras de levier) (m)

Remarque 7 (sur l'usage des moments de force).
Deux remarques importantes :
- Il faut toujours préciser par rapport à quel axe de rotation, on détermine le moment de force.
- Avec cette définition, la force et le bras de levier sont orthogonaux. (C'est ce que nous avons fait jusqu'ici sans le dire. Ce ne sera bientôt plus nécessairement le cas.)

B Reformulation de la loi des leviers

Nous pouvons dès lors reformuler la loi des leviers en terme des moments de forces.

Loi 4 (Loi des leviers en terme de moments de force)**.**

$$M'_m = M'_r \tag{17.4}$$

Les moments de force doivent être égaux.

C Somme des moments de force

Mais que se passe t' il s'il y a plus que deux forces ? Et si elles ne s'appliquent pas au même endroit ?

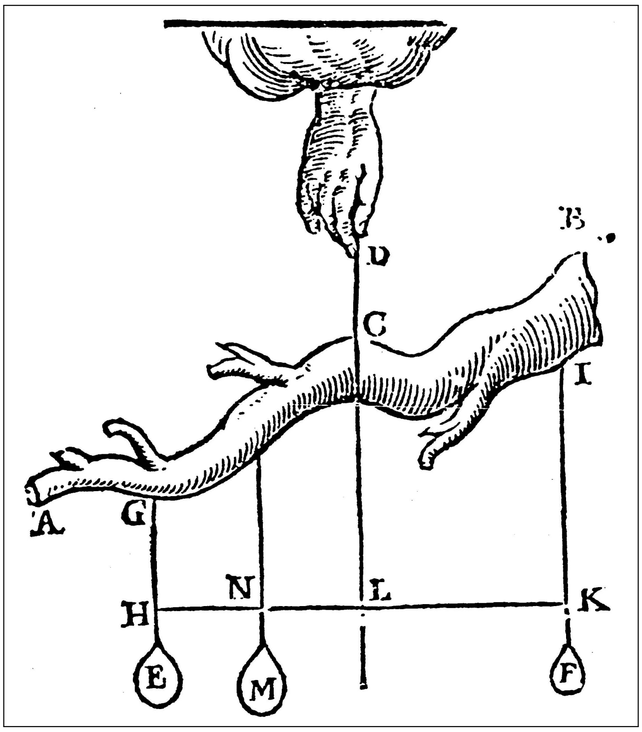


FIGURE 17.5 – Trois forces sur un levier selon Simon Stevin.

Il "suffit" d'additionner les moments du "bon côté" du signe d'égalité.
Imaginons avoir cinq forces toutes dirigées vers le bas, deux à gauche et trois à droite.

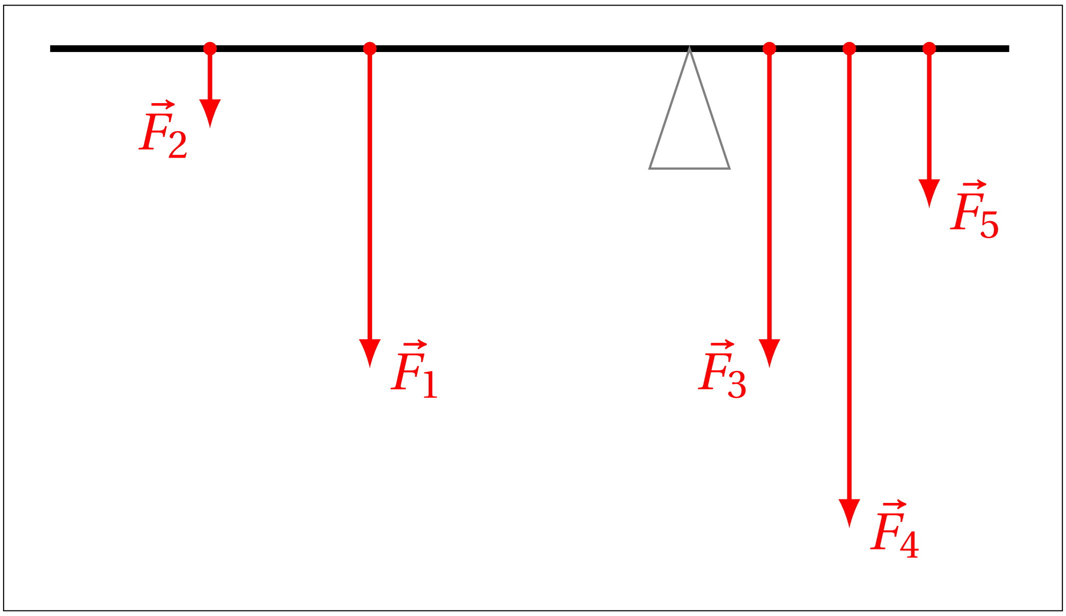


FIGURE 17.6 – Levier avec cinq forces : deux à gauche et trois à droite du point d'appui.

$$M'_1 + M'_2 = M'_3 + M'_4 + M'_5 \tag{17.5}$$

D Signes des moments de force

La relation précédente pourrait se réécrire :

$$M'_1 + M'_2 - M'_3 - M'_4 - M'_5 = 0 \tag{17.6}$$

Il nous a suffit d'additionner les forces à gauche et de soustraire les forces à droite.

a) Sens de rotation et signe des moments de force

Comment déterminer une condition d'équilibre de façon plus générale ?

Souvenons-nous de la convention de signe des angles en trigonométrie : Le sens anti-horlogique est compté positif ; le sens horlogique est compté négatif.

Adoptons la même convention :

Loi 5 (Signe des moments de force)**.** *Si par rapport à un axe de rotation donné, une force contribue à un mouvement de sens anti-horlogique, son moment de force est compté positif.*

Si par rapport à un axe de rotation donné, une force contribue à un mouvement de sens horlogique, son moment de force est compté négatif.

E Condition d'équilibre de rotation

Dès lors,nous pouvons écrire des conditions d'équilibre de rotation.

Soit en égalant la somme des valeurs (absolues) des moments "tournant" en sens anti-horlogique à la somme des valeurs (absolues) des moments "tournant" en sens horlogique.

Loi 6 (Équilibre de rotation : $\circlearrowleft = \circlearrowright$)**.**

$$\sum M'_{\circlearrowleft} = \sum M'_{\circlearrowright} \tag{17.7}$$

Soit en additionnant la somme des valeurs des moments "tournant" en sens anti-horlogique et en y soustrayant la somme des valeurs (absolues) des moments "tournant" en sens horlogique. Le résultat de l'opération devant être nul.

Loi 7 (Équilibre de rotation : $\circlearrowleft - \circlearrowright = 0$)**.**

$$\sum M'_{\circlearrowleft} - \sum M'_{\circlearrowright} = 0 \tag{17.8}$$

F Définition

Définition 33 (Moment de force)**.** Si la force est perpendiculaire au bras de levier, alors

$$M = F \cdot d \tag{17.9}$$

où :

— M = est la valeur du moment de la force F par rapport au point d'appui (ou à l'axe de rotation) (N m) ou (kg m^3 s^{-2}),

— F = la force considérée (N) ou (kg m^2 s^{-2}),

— d = la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation (ou encore la longueur du bras de levier) (m)

Si par rapport à un axe de rotation donné, une force contribue à un mouvement de sens anti-horlogique, son moment de force est compté positif.

Si par rapport à un axe de rotation donné, une force contribue à un mouvement de sens horlogique, son moment de force est compté négatif.

4 Poutres et autres

L'équilibre d'une poutre avec des points d'appui multiples peut être traitée avec les moments de force.

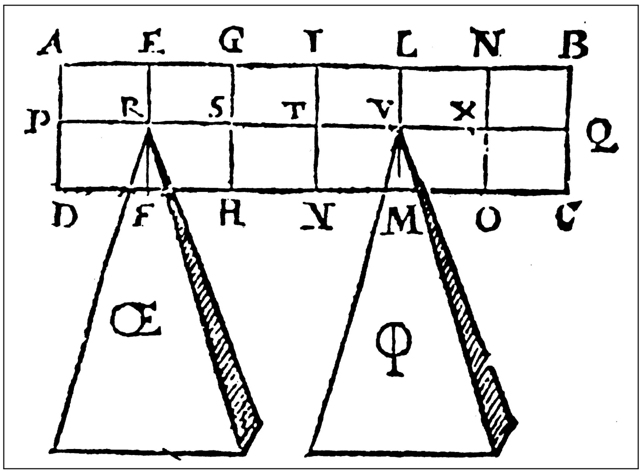


FIGURE 17.7 – Un poutre avec deux points d'appui selon Simon Stevin.

A Analyse de la situation

a) Les forces

Quelle sont les forces qui agissent sur la poutre ?

Il y a :

— le poids de la poutre (au centre de masse de la poutre, verticale et dirigée vers le bas),
— la force de résistance exercée par l'appui de gauche (au point d'appui de gauche, verticale et dirigée vers le haut),
— la force de résistance exercée par l'appui de droite (au point d'appui de droite, verticale et dirigée vers le haut).

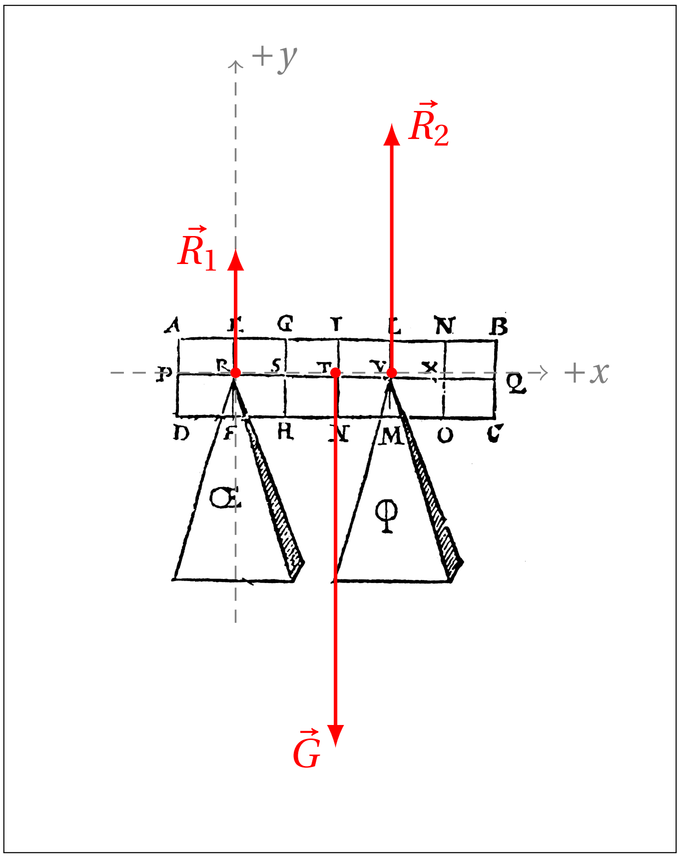


FIGURE 17.8 – Les forces sur la poutre avec deux points d'appui.

b) Les moments de force

Il faut déterminer les moments de force par rapport à chaque point d'appui successivement.

(i) Point d'appui de gauche

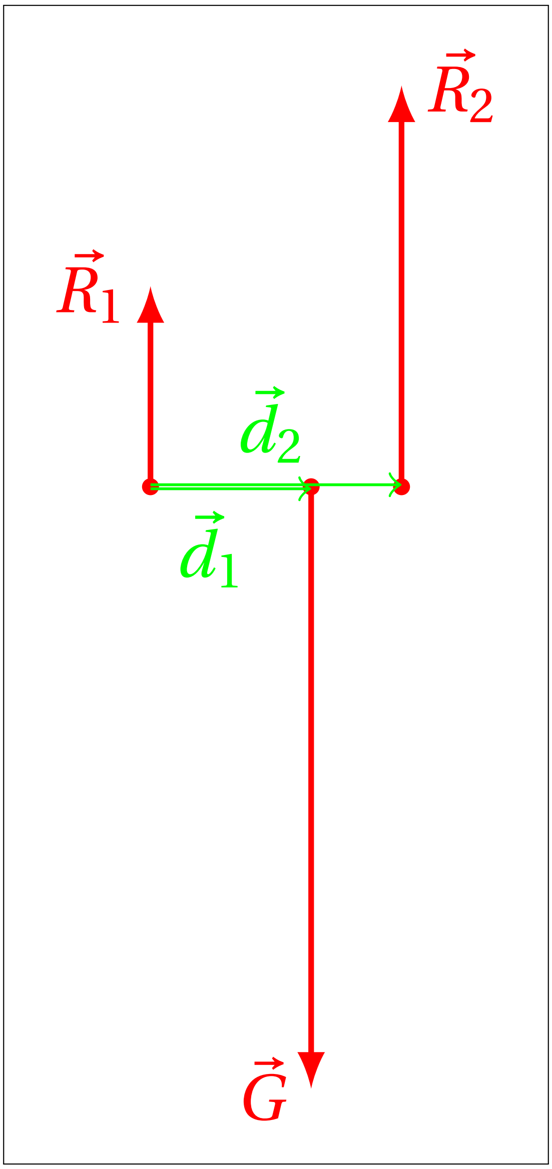


FIGURE 17.9 – Point d'appui de gauche.

Le moment de $\vec{R}_1$ est nul puisque la distance entre le point d'appui choisi et $\vec{R}_1$ est nulle. Le moment de $\vec{G}$ vaut $d_1 G$ et engendre une rotation anti-horlogique. Le moment de $\vec{R}_2$ vaut $d_2 R_2$ et engendre une rotation horlogique.

(ii) Point d'appui de droite

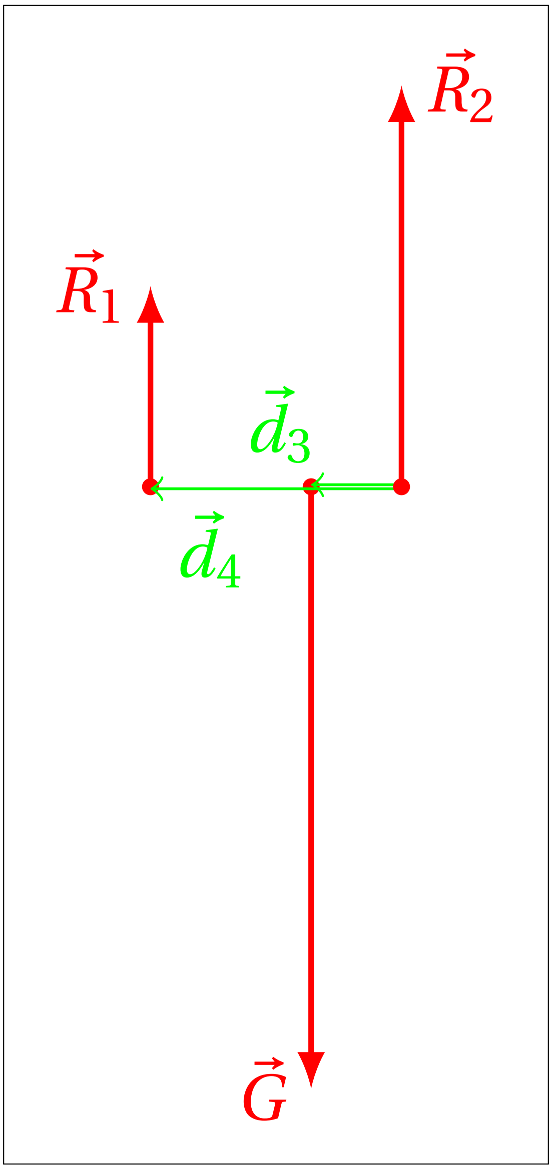


FIGURE 17.10 – Point d'appui de droite.

Le moment de $\vec{R}_2$ est nul puisque la distance entre le point d'appui choisi et $\vec{R}_2$ est nulle.

Le moment de $\vec{G}$ vaut $d_3 G$ et engendre une rotation anti-horlogique.

Le moment de $\vec{R}_1$ vaut $d_4 R_2$ et engendre une rotation anti-horlogique.

Remarquons que si nous prenons les longueurs des bras de leviers en valeur absolue, alors :

- $d_4 = d_2$
- $d_3 = d_2 - d_1$

B Équivalence poutre et leviers

Comme Stevin l'avait compris le traitement de la poutre peut être comparé à celui d'un levier !

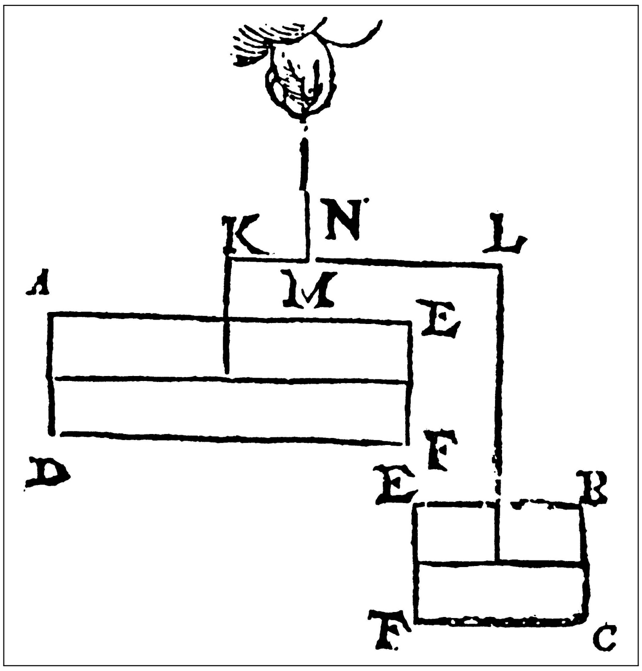


FIGURE 17.11 – Un poutre avec deux points d'appui = un levier selon Simon Stevin.

5 Autres machines simples qui peuvent être comparées aux leviers

A Le treuil

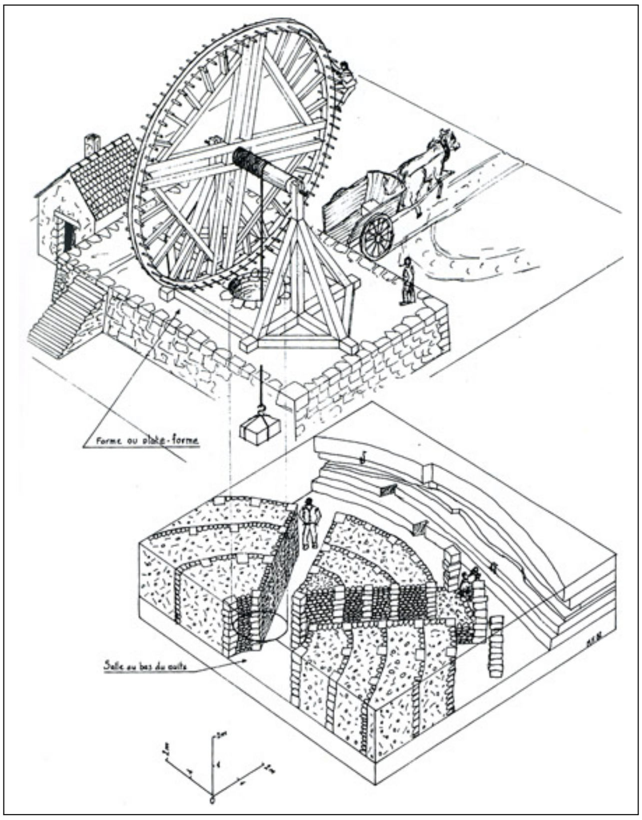


FIGURE 17.12 – Le treuil.

B Le pédalier de vélo

FIGURE 17.13 – Le pédalier de vélo.

6 Le produit vectoriel

Introduction

Dans ce qui suit nous allons établir le lien entre les moments de force et le produit vectoriel. Nous allons essentiellement travailler dans le plan mais envisagerons les vecteurs forces et "bras de force" comme ayant une valeur nulle pour leur troisième coordonnée (pour la troisième dimension d'espace) .

A Le produit vectoriel

Pour aborder ce point, il est nécessaire de connaître la définition et les règles du produit vectoriel, ainsi que quelques concepts associés aux vecteurs dans l'espace.

a) Repère direct et indirect

Pour travailler dans l'espace, il faut utiliser une base et un repère. Choisissons les orthonormés.
Commençons par définir une repère direct.
Imaginons que notre base est représentée par un bonhomme !

La colonne vertébrale représente l'axe vertical (axe z ou $\overrightarrow{k}$). Le sens positif de cet axe est orienté depuis les pieds vers la tête. Les deux autres axes sont représentés par les bras du bonhomme. Si le bras droit est l'axe x(ou $\overrightarrow{i}$) et le bras gauche l'axe y (ou $\overrightarrow{j}$), alors la base est dite "directe".

Si le bras droit est l'axe y (ou $\overrightarrow{j}$) et le bras gauche l'axe x(ou $\overrightarrow{i}$), alors la base est dite indirecte.

Définition 34. Strictement, une base $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base directe si $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$.

µ Les permutations cycliques sont vérifiées : $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$

b) Définition du produit vectoriel

Le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est un vecteur et se note $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ et est :

- égal à $\overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$;
- si $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{b}$ alors $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est
  - orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$,
  - tel que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b})$ est une base directe de l'espace
  - et de norme $\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \| = \| \overrightarrow{a} \| \cdot \| \overrightarrow{b} \| \cdot | \sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) |$.

c) Technique de calcul du produit vectoriel avec les coordonnées des vecteurs

Dans un repère orthonormé direct, si les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont : $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

alors le produit vectoriel $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est égal à

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - b_z a_x \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$

Pour rappel, le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ peut se calculer comme le pseudo-déterminant suivant

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = a_y b_z - b_y a_z \vec{1}_x + a_z b_x - b_z a_x \vec{1}_y + a_x b_y - b_x a_y \vec{1}_z$$

d) Cas particulier où les deux vecteurs sont dans le plan "xy"

Dans ce cas les composantes "z" des vecteurs sont nulles et les composantes "x" et "y" du produit vectoriel sont égales à zéro. Le produit vectoriel revient à calculer $a_x b_y - b_x a_y$.

B Application aux moments de force

a) La force et le bras de levier sont perpendiculaires

Si la force et le bras de levier sont orthogonaux, alors le moment est maximum.

b) Sens de la rotation

Le moment de force est un vecteur qui est perpendiculaire au plan de la rotation. Il indique le sens de la rotation selon qu'il pointe au-dessus ou au-dessous du plan de rotation.

C la force et le bras de levier ne sont pas perpendiculaires

a) Différentes situations

(i) Force et le bras de levier perpendiculaires

Alors le moment de force est maximum. (C'est ce que nous avons fait jusqu'à présent.)

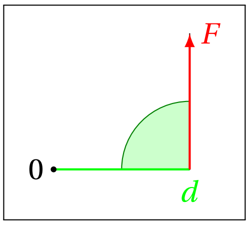


FIGURE 17.14 – Bras de levier avec angle droit.

(ii) Force et bras de levier parallèles

Dans ce cas, il n'y a pas de rotation ! Le moment de force est nul !

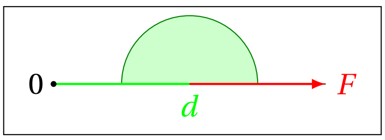


FIGURE 17.15 – Bras de levier avec angle plat.

(iii) Force et bras de levier faiblement inclinés l'un par rapport à l'autre

(Pour fixer les idées, disons 170^0.) Le moment de force est faible.

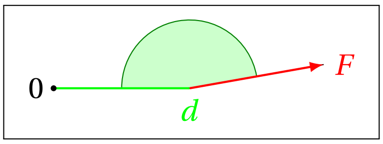


FIGURE 17.16 – Bras de levier avec angle faible.

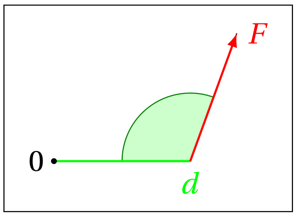


FIGURE 17.17 – Bras de levier avec angle important.

(iv) Force et bras de levier fortement inclinés l'un par rapport à l'autre
(Pour fixer les idées, disons 110^0.) Le moment de force est plus important.

b) Analyse

Nous savions que les moments de force étaient fonction de la grandeur de la force et de la longueur du bras de levier :

$$\vec{d} \perp \vec{F} \Rightarrow M = dF$$

Les points précédents indiquent que les moments de force dépendent aussi de l'angle α entre $\vec{d}$ et $\vec{F}$.

La fonction de l'angle α qui est nulle si $\vec{d} \parallel \vec{F}$ et est croissante entre 0^0 et 90^0 pour atteindre alors un maximum (quand $\vec{d} \perp \vec{F}$) est la fonction sinus.

Nous pouvons dès lors écrire :

$$M = dF \sin\alpha \tag{17.10}$$

c) Synthèse

Ce qui précède suggère que le moment de force soit un vecteur. C'est bien le cas.

La définition du moment de force à trois dimensions est :

$$\overrightarrow{M} = \vec{d} \wedge \overrightarrow{F} \tag{17.11}$$

Cinquième partie

Dynamique

Chapitre 18

Les lois de Newton

Sommaire

Introduction

Les lois fondamentales de la dynamique sont aussi appelées les 3 lois de Newton :

1. Le principe d'inertie
2. La relation $F = ma$
3. Le principe d'action réciproque (action et réaction)

1 Le principe d'inertie

Quelle est la cause du mouvement ?
Q. : Quelle est la cause du mouvement ?
rmq. : Les réponses des élèves sont souvent "aristotéliciennes" : Le mouvement est dû à une qualité transmise à l'objet en mouvement
R. :

A Principe

a) Exemple

Je roule à vélo sur une route plate. J'arrête de pédaler. Que se passe t' il ? Mon vélo poursuit son mouvement. Pourquoi ?

b) L'inertie

Tous les corps matériels ont de l'inertie, c'est à dire qu'ils sont **incapables de modifier par eux-mêmes leur trajectoire ou leur vitesse** :

- Si le corps est au repos, **il ne peut se mettre en mouvement seul**.
- S'il se déplace en ligne droite, **il continue en ligne droite**.
- S'il se déplace à vitesse constante, **il continue à vitesse constante** (*s'il n'y pas de frottement*).

c) Première loi de Newton

Lancé sur un plan horizontal infini, en l'absence d'obstacle, un mobile continue indéfiniment son MRU. Tout corps conserve son état soit de repos, soit de MRU, si aucune force n'agit sur lui.

La formulation mathématique est la suivante :

Principe 1 (Principe d'inertie)**.**

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \equiv \vec{v} = cst. \tag{18.1}$$

Donc, si la résultante de toutes les forces s'exerçant sur un corps est nulle, alors la vitesse de ce corps est constante et réciproquement.

d) Cas particulier

Si la vitesse est nulle, elle est constante. Nous connaissons la règle d'équilibre de translation qui dit qu'un objet est immobile si la somme des forces qui s'y appliquent est nulle.

Il s'agit donc d'un cas particulier du principe d'inertie.

e) Exemple (suite)

Pour que mon vélo arrête son MRU, je dois freiner. Je dois pédaler pour accélérer. Dans les deux cas, je dois appliquer une force.

Et si, en pratique, mon vélo s'arrête seul après un certain temps, c'est à cause des forces de frottement.

B Importance du système de référence

Le système de référence, c'est le repère en math. C'est à dire le système d'axes (l'origine, les axes et les unités).

Notons qu'il y a d'autres manières de construire un système de références mais nous n'en parlerons pas ici.

Cette première loi de Newton n'est valable que si le système de référence n'est soumis à aucune accélération.

a) Exemple

— Un wagon sur une voie
— Une balle sur une table dans le wagon.
— 2 observateurs A et B : A dans le wagon, B sur le quai

1. Le wagon est en MRU par rapport a quai.

FIGURE 18.1 – Wagon en MRU.

   — Pour B : la balle suit un MRU
   — Pour A : La balle est immobile
   — Pour A et B, la somme des forces sur la balle = 0

2. Le wagon est soumis à une accélération

FIGURE 18.2 – Wagon soumis à une accélération.

— Pour B : la balle est immobile par rapport au quai.
— Pour A : La balle semble subir une accélération “-a”.
— La balle n'est soumise à aucune force : Le principe d'inertie n'est pas respecté.

Conclusion : Le principe d'inertie n'est pas valable pour tous les systèmes de référence. Dans la plupart des cas, la Terre peut être considérée comme un système inertiel. Mais certaines expériences fines prouvent que ceci n'est qu'une approximation.

2 Le principe fondamental de la dynamique

Cette deuxième loi est tellement importante que nous la baptiserons principe fondamental.

A Introduction

Si nous appliquons une force à un corps au repos, il se met en mouvement et acquiert une vitesse v. Si nous appliquons la force en continu, la vitesse va augmenter régulièrement et le mobile sera animé d'un MRUA.

Quelle est la relation liant la force, le corps et l'accélération ?

B Recherche de la relation qui lie F, m et a

a) Dispositif expérimental

Attachons une bouteille d'air comprimé au chariot du rail à coussin d'air. Selon que nous ouvrons plus ou moins fort le robinet, la force fournie par l'air qui s'échappe sera plus ou moins grande. nous pourrons avoir une mesure de cette force gràce à l'instrument de mesure de la force le dynamomètre.

Rajoutons des masses sur le chariot.

Mesurons comme précédemment l'accélération du chariot.

b) Trois grandeurs entrent en jeu.

1. La force,
2. la masse **totale** (masses + chariot + bouteille +air) du chariot,
3. l'accélération du chariot.

c) Démarche théorético expérimentale

Nous pouvons faire varier la force et la masse assez facilement et nous pourrons mesurer leur effet sur l'accélération. Nous allons donc dans un premier temps faire varier la masse , obtenant ainsi un premier lien entre masse et accélération et dans un deuxième temps faire varier la force, obtenant ainsi un deuxième lien, entre force et accélération cette fois.

Nous établirons alors un lien entre les 3 grandeurs.

Pour estimer l'accélération moyenne, nous allons utiliser la relation :

$$\Delta r = \frac{1}{2} a.t^2 \tag{18.2}$$

qui deviendra

$$a = \frac{2.\Delta r}{t^2} \tag{18.3}$$

d) Expérience établissant le lien entre masse et accélération

La force reste identique mais ajoutons des masses sur le chariot. Attention, il faut tenir compte de la masse **totale** (masses + chariot + bouteille +air) du chariot.

Quel est l'effet de la masse sur l'accélération ?

Pour y voir plus clair, organisons l'information dans un tableau :

F (N)	m (kg) (à vide)	m (kg) additionnelle	m (kg) totale	t(s)	a (m/s^2)	$\frac{1}{a}$ (s^2/m)	$k = a.m$ $(\frac{m}{kg\ s^2})$

Nous remarquons que l'accélération diminue en proportion inverse de la masse.

L'accélération est inversement proportionnelle à la masse.

$$a = k.\frac{1}{m} \tag{18.4}$$

où

— a est l'accélération (m/s^2),
— m est la masse (kg),
— k est une constante particulier à l'expérience $(\frac{m}{kg\ s^2})$

Nous discuterons la nature de la constante k plus loin.

e) Expérience établissant le lien force et accélération

Faisons varier la force avec une masse totale qui elle reste constante. Nous remarquons que l'accélération augmente.

Quel est l'effet de la force sur l'accélération ?

Pour y voir plus clair, organisons l'information dans un tableau :

F (N)	m (kg) (à vide)	m (kg) additionnelle	m (kg) totale	t (s)	a (m/s^2)		$K = \frac{a}{F}$ ($\frac{m}{N\ s^2}$)

Nous remarquons que l'accélération augmente en proportion directe de la force.

L'accélération est directement proportionnelle à la force.

$$a = k'.F \tag{18.5}$$

où

— a est l'accélération (m/s^2),
— F est la force (N),
— k' est une constante particulier à l'expérience ($\frac{m}{N\ s^2}$)

C Le principe fondamental de la dynamique (finalement)

Dans la série d'expériences précédentes, nous avons obtenu deux relations importantes : $a = k.\frac{1}{m}$ et $a = k'.F$

Réunissons ces deux relations en une seule et nous obtenons le principe fondamental de la dynamique.

L'accélération d'un mobile est directement proportionnelle à la force qui lui appliquée et inversement proportionnelle à sa masse.

a) Expression mathématique du principe fondamental de la dynamique

Combinons les expressions

$$a = k.\frac{1}{m} \tag{18.6}$$

et

$$a = k'.F \tag{18.7}$$

Nous obtenons

$$a = K.\frac{F}{m} \tag{18.8}$$

et si nous prenons $K = 1$ [1], la relation devient

$$a = \frac{F}{m} \tag{18.9}$$

et donc finalement

1. Ce qui revient à définir la force.

Principe 2 (Principe fondamental de la dynamique)**.**

$$F = m.a \tag{18.10}$$

où

— F est la force (N),
— m est la masse (kg),
— a est l'accélération (m/s^2),

3 Le principe d'action réciproque (action et réaction)

A Exemples

- Un patineur cogne un mur avec les mains, il recule.
- Deux dynamomètres attachés ensemble.
- Une barque sur l'eau avance et fait avancer l'eau.
- Une balle rebondit.

B Principe

Dès qu'un corps est soumis à l'action d'un autre corps, il exerce à son tour une action réciproque sur celui-ci.

Toute action est accompagnée d'une action réciproque.

En réalité, il s'agit d'une interaction entre les 2 corps : les forces si elles sont appliquées au même point s'équilibrent mutuellement.

Troisième loi de Newton :
L'action et l'action réciproque sont toujours égales. Les actions d'un corps sur l'autre sont toujours égales et de sens opposés.

Principe 3 (Principe d'action réciproque)**.**

$$\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\overrightarrow{F}_{B\to A} \tag{18.11}$$

La force que A exerce sur B est égale en module à la force que B exerce sur A. Ces deux forces sont de même direction mais de sens opposé.

4 Exercices

Chapitre 19

Les forces de frottements

Sommaire

Introduction

Nous connaissons tous les frottements. Dans un bon vélo, dans une voiture et dans tous les moteurs en général, on cherche à les éliminer.

1 Mise en situation

Ce que l'on sait moins des forces de frottements , c'est qu'elles sont nécessaires pour se déplacer.

FIGURE 19.1 – La cire qui brille sans glisser !

2 Nature des frottements

Lorsque nous marchons, nos chaussures se soudent littéralement au sol.

Des liens chimiques se forment entre le plancher et nos semelles. Leur usure vient du fait qu'à chaque pas que nous faisons nous devons casser ces liaisons. De petits morceaux de semelles restent collés au sol.

C'est pour ces mêmes raisons que nous devons nous laver les mains. Chaque fois que nous tenons un objet, nos mains et l'objet se soudent. Lorsque nous lâchons l'objet, un peu de notre peau s'en va et de minuscules morceaux de l'objet restent soudés à nos mains.

3 Différents types de frottements

Distinguons tout d'abord les frottements entre deux surfaces solides (frottements secs) et les frottements entre un solide et un fluide (frottements visqueux) .

A Frottements entre 2 surfaces solides

Il existe deux types de forces de frottements solide-solide : les forces de frottements statiques et les forces de frottements dynamiques.

a) Règles générales pour les forces de frottements solide-solide

Les forces de frottements sont :

— parallèles à la surface sur la quelle le corps repose ou à la direction du mouvement,

— opposées au déplacement éventuel,

— proportionnelles à la résistance R de la surface.

b) Les forces de frottements statiques

Si deux surfaces solides sont en contact sans mouvement relatif, il existe une force qui s'oppose à la mise en mouvement d'une surface par rapport à l'autre dans une direction parallèle au plan de contact des surfaces.

Loi 8 (Force de frottement statique)**.**

$$F_f(\max) = \mu_s R \tag{19.1}$$

où :
- $F_f(\max)$ = *la force de frottement statique maximale* (N)*,*
- R = *la force normale à la surface de résistance du matériau* (N)*,*
- μ_s = *le coefficient de frottement statique propre au deux matériaux en contact.*

c) Les forces de frottements dynamiques

Si deux surfaces solides sont en contact et en mouvement dans une direction parallèle au plan de contact des surfaces, il existe une force qui s'oppose à la mise en mouvement d'une surface par rapport à l'autre dans une direction parallèle au plan de contact des surfaces.

Loi 9 (Force de frottement dynamique)**.**

$$F_d = \mu_d R \tag{19.2}$$

où :
- F_d = *la force de frottement dynamique* (N)*,*
- R = *la force normale à la surface de résistance du matériau* (N)*,*
- μ_d = *le coefficient de frottement dynamique propre au deux matériaux en contact.*

Pour deux surfaces données, les forces de frottements statiques sont plus grandes que les forces de frottements dynamiques.

B Frottements Solide-Fluide

Les frottements solide-fluide obéissent à d'autres lois que les forces de frottements entre deux surfaces solides.

Les fluides peuvent être des gaz ou des liquides.

a) Lois des frottements fluide-solide

Les forces de frottements entre un solide et un fluide vont
- être proportionnelles à la vitesse relative de l'objet et du fluide,
- dépendre de la géométrie de l'objet solide,
- dépendre de la densité de l'objet,
- dépendre de la nature du fluide.

Loi 10 (Frottements fluide-solide)**.**

$$\vec{F}_f = -m(bv + cv^2)\vec{1}_v \tag{19.3}$$

où :

- $\vec{F}_f$ = *le vecteur force de frottement* (N)*,*
- m = *la masse de l'objet solide* (kg)*,*
- v = *le module de la vitesse relative entre le fluide et l'objet solide* ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)*,*
- $\vec{1}_v$ = *un vecteur unité dans la direction et le sens de la vitesse,*
- b = *un coefficient dépendant des matières du fluide et du solide ainsi que de la densité et de la géométrie de l'objet solide,*
- c = *un coefficient dépendant des matières du fluide et du solide ainsi que de la densité et de la géométrie de l'objet solide.*

On considère que le coefficient "b" est applicable aux petites vitesses alors que le coefficient "c" lui s'applique aux grandes vitesses.

4 Exercices

Chapitre 20

La force centripète

Sommaire

Introduction

Nous avons étudié le MCU dans le cadre de la cinématique. Ici, nous allons parler des forces en jeu.

1 Force centripète

A Introduction

a) Rappel : le principe d'inertie

$$MRU \Leftrightarrow \Sigma\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

$$Mouvement\ varie \Leftrightarrow \Sigma\overrightarrow{F} \neq \overrightarrow{0}$$

b) mouvement circulaire uniforme

B Rappel des définitions : période, vitesse d'un mouvement circulaire uniforme, ...

* Un objet de masse m
* en mouvement circulaire uniforme
  * de rayon R (m)
  * et de centre C
  * décrit des arcs Δs (m)
  * en des durées égales Δt. (s)
* La durée d'une révolution complète est la période T (s)
  * Ex : L'aiguille des secondes d'un horloge est en MCU et a une période T de $60s$.
  * Ex : L'aiguille des minutes d'un horloge a une période T de ......
  * Ex : L'aiguille des heures d'un horloge a une période T de ......

En MCU, la vitesse v est égale à la longueur d'arc de cercle parcourue par unité de temps. Càd.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

où

— Δt est la durée nécessaire (s)
— pour parcourir
— Δs la longueur d'arc (m).

Attention : Rappel le sens positif est le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Pour un tour (une circonférence) : $\Delta s = 2\pi R$ et $\Delta t = T$
Et donc :

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

a) Caractéristiques du vecteur vitesse

Les caractéristiques du vecteur $\vec{v}$ sont :

* Sa direction : $\vec{v} \perp R$
* son sens : le sens du mouvement
* sa grandeur : $v = \frac{2\pi R}{T}$
* son point d'application : le centre de masse du mobile désigné par P.

b) Vitesse angulaire

La vitesse angulaire est liée à la période et aux "nombre de tours" par seconde. Elle est une mesure de l'angle fait par unité de temps. Plutôt que de mesurer en l'angle en degré, par convention, elle est donnée en "radians par seconde" :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\Delta s}{R\Delta t}$$

(rad/s)

C La force centripète

Si nous faisons tourner un objet au bout d'une corde, nous devons tirer sur la corde. Il faut donc exercer une force vers le centre de rotation. Cette force courbe sans cesse la trajectoire.

Cette force est la force centripète.

Si nous cessons d'exercer cette force, si nous lâchons la corde par exemple, alors il n'y a plus de force exercée sur l'objet et conformément au principe d'inertie, il part en ligne droite. (si nous négligeons les frottements, la gravité, ...) C'est le principe d'une fronde.

Remarquons que nous n'avons pas besoin de force centrifuge ! Cette force existe dans le langage de tous les jours mais n'existe pas en tant que telle. Les physiciens parlent de "pseudo-force".

D L'accélération centripète

a) Rappel : principe fondamental de la dynamique

$$F = m.a$$

Rappelons que l'accélération est aussi une grandeur vectorielle. Dès lors $F = m.a$ devient, sous forme vectorielle,

$$\vec{F} = m.\vec{a}$$

Ce que cette relation indique c'est que la force $\vec{F}$ est proportionnelle à l'accélération $\vec{a}$. Comme la masse m ne peut pas être négative, les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{a}$ sont de même direction et de même sens.

b) Application de principe fondamental de la dynamique en MCU

L'accélération $\vec{a}$ est donc aussi dirigée vers le centre.

Le principe fondamental de la dynamique et la définition de $\vec{a}$ comme différence de vitesses sont concordantes.

E Grandeur de la force et de l'accélération centripète

a) introduction

Nous connaissons maintenant

* le point d'application (le point P : centre de masse de l'objet de masse m)
* la direction (selon une droite reliant le centre C et le point P) et
* le sens (pointant vers le centre C)

de la force centripète. Ceci est aussi valable pour l'accélération centripète.

Mais nous ne connaissons pas encore sa grandeur (ou intensité). Étudions ici cette question.

b) Considérations expérimentales

Si nous faisons tourner une masse autour de nous (au lancer de marteau, en faisant tourner une fronde, ...), nous pouvons constater rapidement une série de choses :

La force (centripète) que nous devons exercer pour retenir l'objet en rotation est d'autant plus grande que :

* la masse m de l'objet est grande,
* la grandeur v de la vitesse est grande,
* le rayon R est petit.

Cette dernière considération est un peu contraire au sens commun.

c) Conclusion

Des mesures précises nous permettent de déduire la relation suivante :

$$F = m\frac{v^2}{R}$$

Comme $F = m.a$ peut s'écrire $a = \frac{F}{m}$, nous déduisons que, pour un mobile en MCU, l'intensité de l'accélération centripète vaut :

$$a = \frac{F}{m} = \frac{v^2}{R}$$

2 Applications

A Pourquoi les pneus lisses sont-ils dangereux ?

FIGURE 20.1 – Pneus lisses dans un virage.

B Les balançoires du carrousel

FIGURE 20.2 – les balançoires du carrousel.

C Les vélos de vitesse pure

FIGURE 20.3 – Vélos de vitesse pure.

D Les satellites

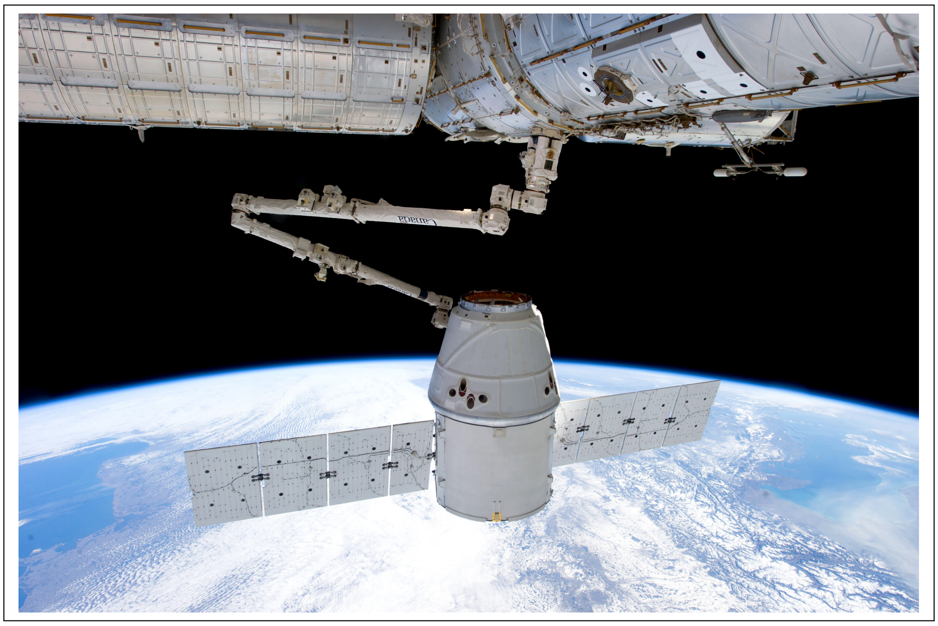


FIGURE 20.4 – Satellite.

3 Force de Coriolis

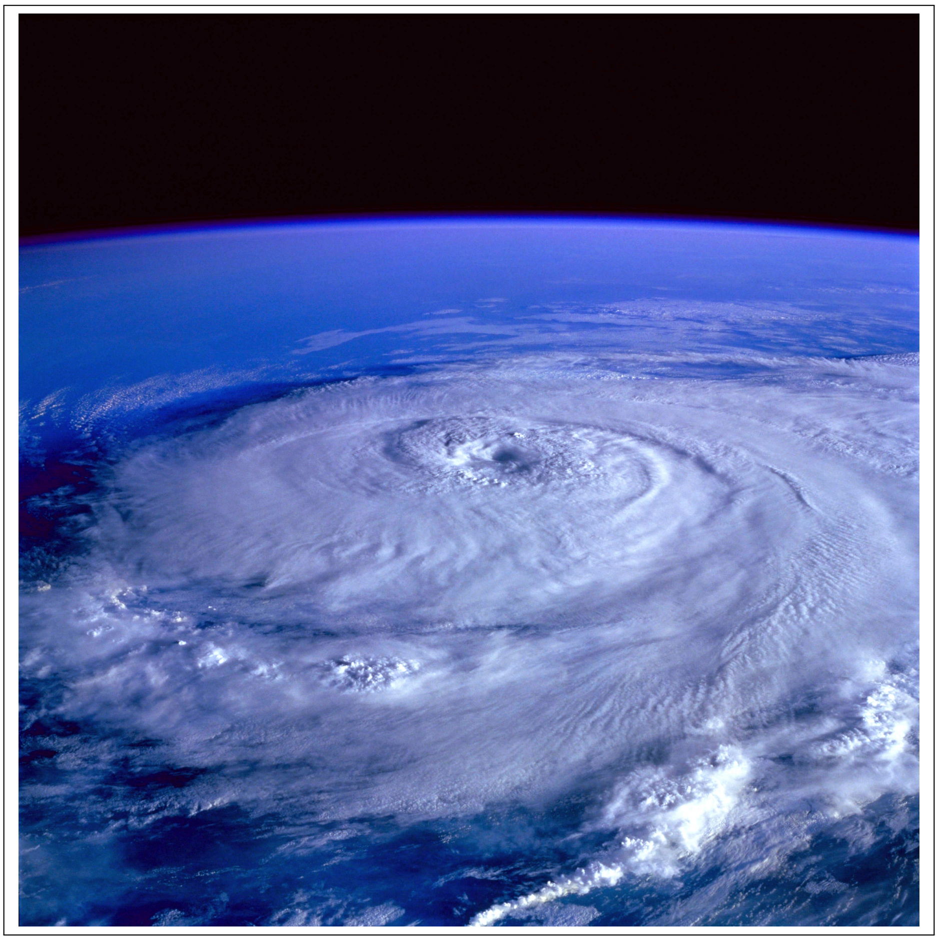


FIGURE 20.5 – Force de Coriolis.

4 Exercices

Sixième partie

Les lois de conservation

Chapitre 21

Travail

Sommaire

Introduction

Nous étudierons ici le concept de travail mécanique.

Si certaines transformations peuvent avoir lieu sans qu'aucune force visible n'en soit la cause (Ex. : une réaction chimique qui dégage de la chaleur), dans d'autres cas, la transformation de l'énergie est visiblement réalisée grâce à l'action d'une force.

1 Rappel sur les leviers

Nous avons étudié les leviers. considérons le cas d'un levier inter-appui.

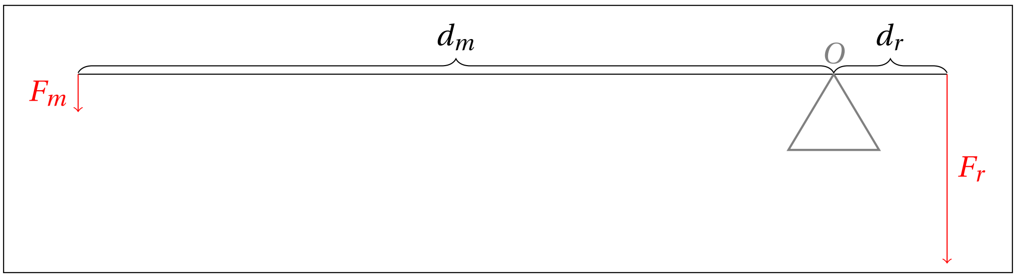


FIGURE 21.1 – Rappel : les forces et les distances dans la latte en équilibre

La loi des leviers nous disait :

$$d_m \cdot F_m = d_r \cdot F_r \tag{21.1}$$

Considérons maintenant un mouvement de faible amplitude réalisé en utilisant ce levier, nous réalisons un "effort" pour déplacer un objet avec le levier.

"Quelque chose" est transmis par l' "acteur" qui fait l'effort à l'objet qui "subit" l'effort.

Une de ces "choses" est de l'énergie !

Nous désirons évidemment mesurer les quantités d'énergie échangées.

2 Définitions, formules

C'est le travail qui permet de mesurer cet échange d'énergie.

A Une première définition

Définition 35. Le travail est la mesure de l'échange d'énergie dans les processus mécaniques.

ou encore

Définition 36. On appelle *travail* d'une force agissant sur un corps, au cours d'un déplacement, la variation d'énergie que cette force tend à produire.

B Une deuxième définition

Il nous faut évidemment arriver à une définition plus précise.

a) Découverte

Revenons à notre levier.

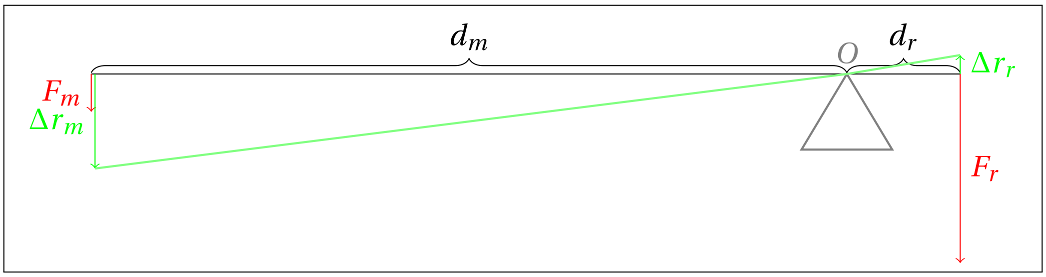


FIGURE 21.2 – Rappel : les forces et les distances dans la latte en équilibre

Si nous considérons maintenant un mouvement de faible amplitude réalisé en utilisant ce levier, nous voyons apparaître deux triangles.

Ces deux triangles sont semblables.

Les longueurs des côtés latéraux de ces triangles sont donc dans des rapports semblables aux rapports entre les bras de leviers.

Comme le mouvement est de faible amplitude on peut égaler les longueurs des déplacements des extrémités du levier (qui en réalité se font sur un arc de cercle) aux longueurs des côtés extérieurs de ces triangles.

Les produits des longueurs des déplacements et des forces sont égaux pour chaque côté du levier.

Ces produits sont égaux à l'énergie fournie et à l'énergie consommée. Ce sont les travaux des forces !

b) Définition en terme de force et de déplacement

Définition 37 (Travail d'une force et d'un déplacement parallèles)**.** Le travail d'un force F sur un déplacement (ici rectiligne et parallèle à la force) Δr est le produit de la grandeur de la force et de la longueur du déplacement :

$$W = F \cdot \Delta r \tag{21.2}$$

c) Définition de l'énergie

Ce faisant nous avons défini l'unité d'énergie !

Définition 38 (Le joule)**.** Un joule est la quantité d'énergie produite ou consommée par une force de 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force.

$$1J = 1N \cdot 1m \tag{21.3}$$

Les moments de force des leviers avaient ces mêmes unités ! Ce n'est pas un hasard et nous y reviendrons plus tard.

C Une troisième définition

Pourtant toutes les forces n'aboutissent pas à un même transfert d'énergie.

a) Mise en situation

Si j'applique une force à un objet qui ne peut se déplacer dans la direction de la force (en poussant un wagonnet perpendiculairement à ses rails par exemple), je vais dépenser de l'énergie mais pas en transmettre au wagonnet !

En faisant varier les angles entre la direction de la force et la direction du déplacement éventuel, je constate que le travail est nul pour un angle nul ou plat et maximum pour un angle droit.

La grandeur trigonométrique qui obéit à une telle relation est le cosinus.

b) Définition en terme d'angle

En conséquence nous arrivons à une troisième définition.

Définition 39 (Travail d'une force non parallèle au déplacement)**.**

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha \tag{21.4}$$

c) Définition en terme vectoriel

Nous pouvons de suite écrire :

Définition 40 (Travail comme produit scalaire)**.**

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} \tag{21.5}$$

3 Travail moteur ou résistant

Clairement un objet transmet de l'énergie à un autre : il y a un donneur et un récepteur.

A Définition qualitative

On associe un qualitatif au travail selon qu'il s'agit du travail du donneur ou du travail du récepteur.

Définition 41 (Travail moteur et travail résistant)**.**

— Le travail du donneur d'énergie est considéré comme positif et est appelé le travail *moteur*.
— Le travail du récepteur est considéré comme négatif et est appelé le travail *résistant*.

Considérons dans un premier temps des forces et des déplacements parallèles.

Remarquons de suite que le travail est moteur lorsque la force et le déplacement sont de même sens.

Par contre, le travail est résistant si la force et le déplacement sont de sens opposés.

B Définition quantitative

Si la force et le déplacement ne sont pas parallèles, c'est le signe du cosinus de l'angle qu'ils forment qui nous dira si le travail est moteur ou résistant.

Définition 42 (Travail moteur ou résistant en terme de cosinus)**.**

$$\begin{aligned} W > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{F\Delta r}) > 0 \\ W < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{F\Delta r}) < 0 \end{aligned} \tag{21.6}$$

4 Exercices

Chapitre 22

Énergie

Sommaire

Introduction

Nous étudierons ici l'énergie dans le cadre de la mécanique, c'est-à-dire l'énergie mécanique !

Si certaines transformations peuvent avoir lieu sans qu'aucune force visible n'en soit la cause (Ex. : une réaction chimique qui dégage de la chaleur), dans d'autres cas, la transformation de l'énergie est réalisée grâce à l'action d'une force macroscopique.

1 Travail

A Énergie et chute

a) Expérience : trous dans le sable

La profondeur de l'impact est proportionnelle à la hauteur de la chute.

$$Pr. \simeq \Delta h \tag{22.1}$$

La profondeur de l'impact est proportionnelle à la masse du corps qui tombe.

$$Pr. \simeq m \tag{22.2}$$

b) Impact et énergie

La profondeur de l'impact est proportionnelle à l'énergie du corps en fin de la chute.

$$Pr. \simeq E_n \tag{22.3}$$

c) Énergie et hauteur : travail de la gravité

$$\Delta h \simeq E_n \tag{22.4}$$

et

$$m \simeq E_n \tag{22.5}$$

(i) Énergie et force Nous savons qu'énergie et force sont liées. La force qui agit ici, c'est la gravité.

$$F_{gr.} \simeq E_n \tag{22.6}$$

Or

$$F = m.a \tag{22.7}$$

ici

$$F = m.g \tag{22.8}$$

et donc,

$$E_n = F.\Delta h = mg\Delta h \tag{22.9}$$

En pratique nous écrirons :

$$E_{gr.} = mgh \tag{22.10}$$

Gardons à l'esprit que c'est la différence de hauteur qui importe :

$$E_{gr.} = mg\Delta h \tag{22.11}$$

B Travaux moteurs et résistants

a) Découverte

(i) Exemples : chutes, freinages, arcs, monter un seau d'un puits ...

(ii) conditions

— transformation d'énergie,
— opérée grâce à une force,
— au cours d'un déplacement.

b) Formule

Nous venons de voir un cas particulier, celui du travail de la force de gravité.
Et en général :

$$W = \vec{F} \odot \overrightarrow{\Delta r} \tag{22.12}$$

2 Travail et énergie

Pour établir formellement le lien entre énergie et travail, il nous faut tout d'abord affiner la définition de travail.

A Définition du travail le long d'un chemin

Nous connaissons la définition du travail si la force est constante et le déplacement rectiligne. Mais comment calculer le travail d'une force en toute généralité ?

a) À une dimension

Pour aborder la question, envisageons tout d'abord une situation à une dimension.
Soit une force F (pas nécessairement constante) , qui s'accompagne d'un déplacement entre un point A et un point B. La force F est dans la direction de la droite AB.

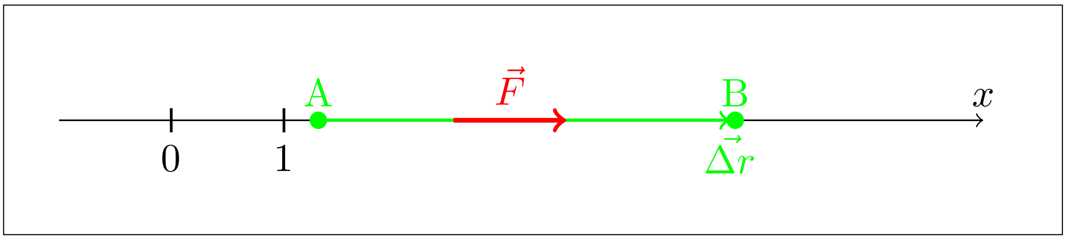


FIGURE 22.1 – Travail à une dimension : force et déplacement entre A et B

Dotons la droite d'un repère et donc d'un axe, soit l'axe "x" cet axe en question.
Alors

Définition 43 (Travail d'une force le long d'un chemin à une dimension)**.**

$$W_{AB} = \int_A^B F \,\mathrm{d}x \tag{22.13}$$

Ce travail peut être positif, négatif ou nul.

B Théorème de l'énergie cinétique

Continuons à traiter le problème à une dimension. Nous verrons par après que tout ceci est généralisable à trois dimensions.

À une dimension, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$F = ma \tag{22.14}$$

La définition cinématique de l'accélération nous permet d'écrire :

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{22.15}$$

Comme nous sommes à une dimension, nous pouvons écrire que $\Delta r = \Delta x$. Et si nous nous souvenons de la définition de la vitesse :

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{22.16}$$

Transformons cette relation :

$$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t \tag{22.17}$$

En combinant les équations (22.13, 22.15 et 22.17), nous obtenons :

$$W_{AB} = \int_A^B m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v\,\mathrm{d}t \tag{22.18}$$

En simplifiant les $\mathrm{d}t$, l'équation devient

$$W_{AB} = \int_{v_A}^{v_B} mv\,\mathrm{d}v \tag{22.19}$$

qui est indépendante du temps mais où les bornes d'intégration sont les vitesses en A et B et non plus les positions A et B.

Cette intégrale est basique et donne

$$W_{AB} = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_A}^{v_B} \tag{22.20}$$

Ou encore :

$$W_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{22.21}$$

On définit ainsi l'énergie cinétique.

Définition 44 (Énergie cinétique)**.**

$$E_{cin.} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{22.22}$$

En combinant les équations (22.21 et 22.22) on obtient le

Théorème 1 (Théorème de l'énergie cinétique)**.**

$$W_{AB} = E_{cin.B} - E_{cin.A} \tag{22.23}$$

a) Exemple : la gravité

Imaginons lancer un corps vers le haut depuis le sol. Nous donnons une vitesse initiale v_0 à l'objet de masse m.

La gravité est supposée constante. Ce qui est une approximation raisonnable à proximité de la surface de la Terre.

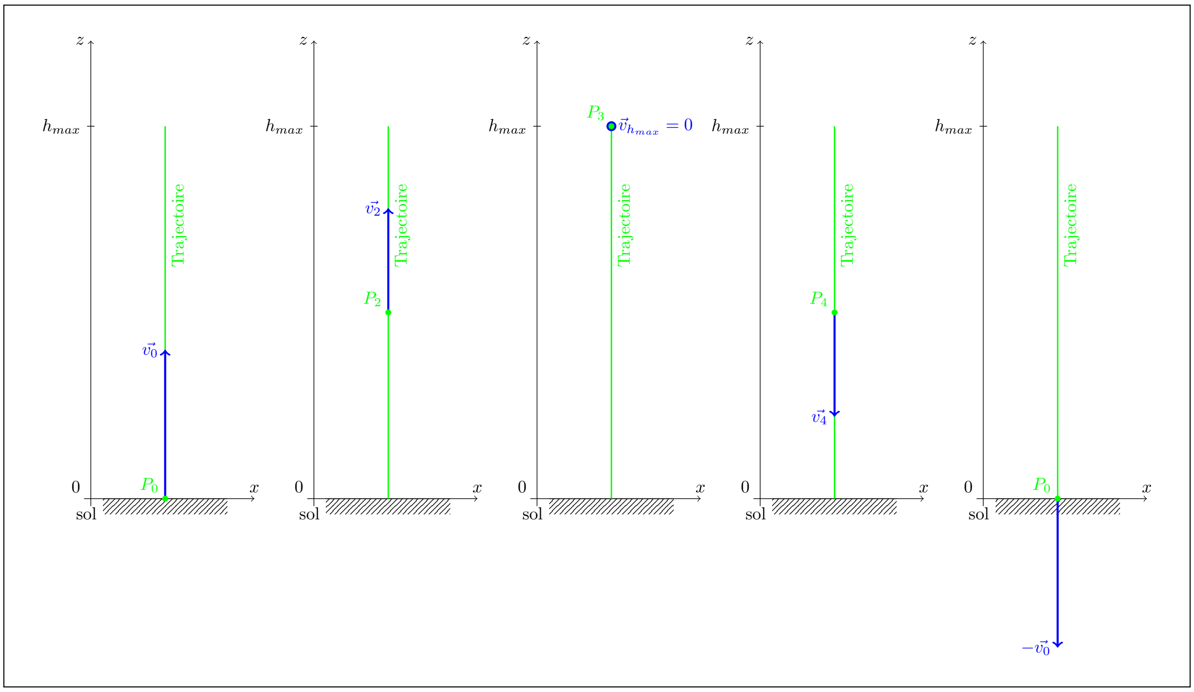


FIGURE 22.2 – Lancer d'une masse m à la verticale avec une vitesse v_0 depuis le sol.

La seule force en jeu est le poids.

La question que nous nous posons est "jusqu'à quelle hauteur h l'objet va-t' il monter ?"

Utilisons le théorème de l'énergie cinétique [1].

$$W_{AB} = -mgh \tag{22.24}$$

Le travail est négatif car la force pointe vers le bas tandis que le déplacement se fait vers le haut. Ce travail est donc résistant.

Par ailleurs, le théorème de l'énergie cinétique nous dit que

$$W_{AB} = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{22.25}$$

En effet, la vitesse finale en B est nulle et donc l'énergie cinétique en B vaut 0. Et la vitesse en A est la vitesse initiale v_0.

Nous pouvons dès lors écrire :

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{22.26}$$

Il est facile d'en déduire la hauteur "h" jusque laquelle la masse va monter.

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \tag{22.27}$$

1. Certes, nous pourrions résoudre la question avec des méthodes vues précédemment. Nous faisons le choix d'essayer une nouvelle méthode. Nous laissons la vérification du résultat avec une autre méthode comme exercice.

Ce résultat est indépendant de la masse m du corps lancé vers le haut !
Il est aussi cohérent avec les calculs réalisés en cinématique.

b) Principe d'inertie et théorème de l'énergie cinétique

Si la somme des forces s'exerçant sur un corps est nulle, alors, nécessairement, le travail total de ces forces est nul. Dans ce cas la variation d'énergie cinétique doit aussi être nulle.
Ce qui revient à dire que la vitesse du corps doit être constante.
Nous retrouvons ainsi le principe d'inertie : "Si la résultante des forces s'exerçant sur un corps est nulle, ce corps est en MRU."

C À trois dimensions

Les résultats précédent se démontrent facilement à trois dimensions. La définition 22.13 à une dimension devient

Définition 45 (Travail d'une force le long d'un chemin à trois dimensions)**.**

$$W_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F} \odot \overrightarrow{\mathrm{d}r} \tag{22.28}$$

Si on écrit les composantes de $\overrightarrow{F}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{d}r}$ dans une base cartésienne, on obtient :

$$W_{AB} = \int_A^B F_x \cdot \mathrm{d}r_x + F_y \cdot \mathrm{d}r_y + F_z \cdot \mathrm{d}r_z \tag{22.29}$$

L' intégrale peut être transformée en plusieurs intégrales à une dimension :

$$W_{AB} = \int_{A_x}^{B_x} F_x \cdot \mathrm{d}r_x + \int_{A_y}^{B_y} F_y \cdot \mathrm{d}r_y + \int_{A_z}^{B_z} F_z \cdot \mathrm{d}r_z \tag{22.30}$$

Ces intégrales peuvent être traitées selon le théorème de l'énergie cinétique

$$W_{AB} = \frac{1}{2}m(v_{B_x}^2 - v_{A_x}^2) + \frac{1}{2}m(v_{B_y}^2 - v_{A_y}^2) + \frac{1}{2}m(v_{B_z}^2 - v_{A_z}^2) \tag{22.31}$$

Souvenons-nous que

$$v_B^2 = v_{B_x}^2 + v_{B_y}^2 + v_{B_z}^2 \tag{22.32}$$

Nous pouvons écrire

$$W_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{22.33}$$

Ce résultat est identique à celui de l'équation 22.21 (p. 204).
Le théorème de l'énergie cinétique est généralisable à trois dimensions.

D Forces conservatives et non conservatives

Imaginons nous aux montagnes russes.
Deux chariots démarrent de la même hauteur avec une même vitesse initiale et vont arriver ensuite à une même hauteur qui sera inférieure à celle de départ.
Supposons dans un premier temps que les frottements sont négligeables. Seule la gravité agit sur les chariots.

Le premier descend directement. Le deuxième doit d'abord, *uniquement* grâce à sa vitesse initiale, passer une "bosse".

Alors, dans ces conditions, les deux chariots auront la même vitesse finale à la fin de leur trajectoire.

On dit que la gravité est une force conservative.

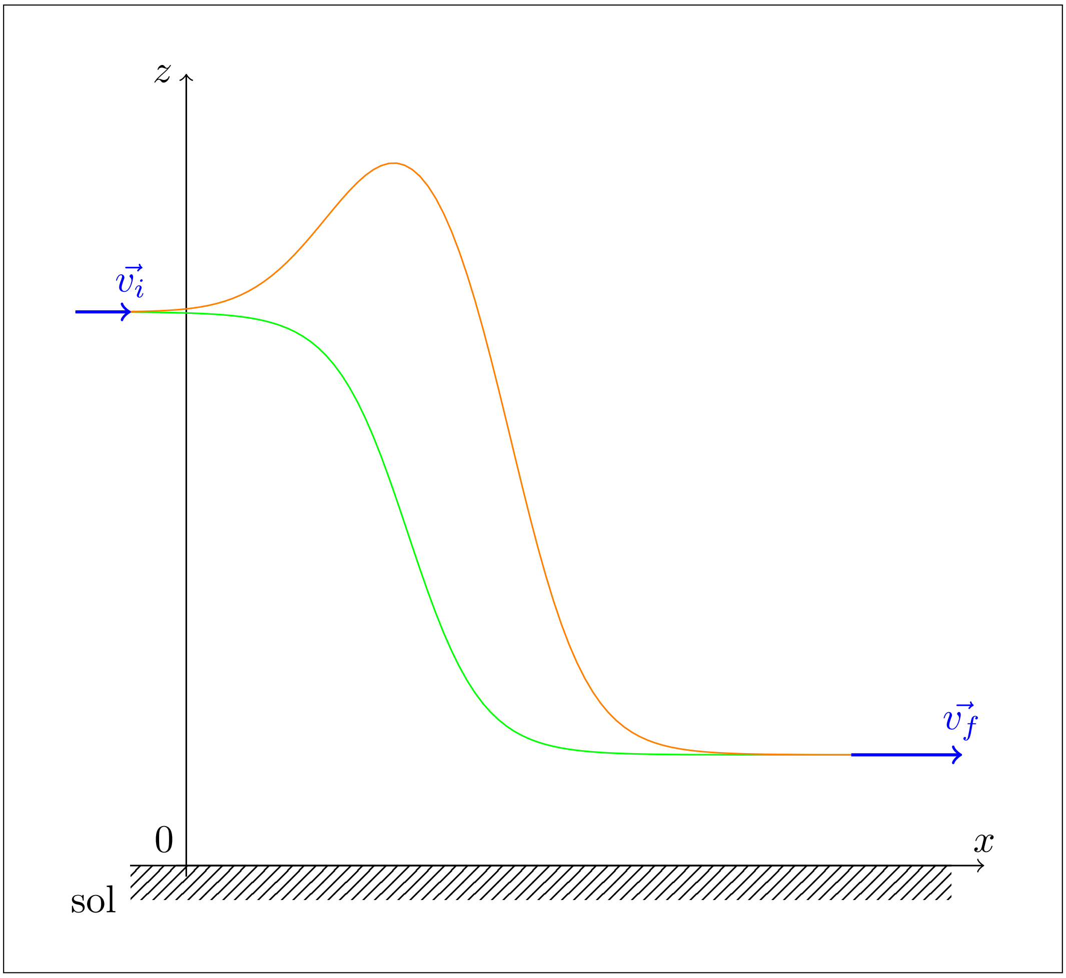


FIGURE 22.3 – Deux trajectoires aux montagnes russes : la gravité est une force conservative.

Si, par contre, les frottements entrent en jeu, le résultat sera différent.

Pour simplifier les choses supposons que les frottements sont uniformes quelle que soit la vitesse et que le "ralentissement" ne dépend que de la longueur du trajet parcouru.

Alors clairement la trajectoire orange sera plus freinée que la verte. Le chariot orange arrivera en bas avec une vitesse inférieure à celle du chariot vert.

Les forces de frottements ne sont *pas* des forces conservatives.

Définition 46 (Force conservative)**.**
Une force conservative est une force telle que la variation d'énergie mécanique d'un objet sur laquelle elle s'exerce ne va dépendre que de ses positions initiale et finale.

La variation d'énergie mécanique sera indépendante du chemin parcouru.

3 Énergies potentielle et cinétique

L'énergie mécanique existe sous deux formes : potentielle et cinétique.

A Énergies potentielles

Nous en connaissons déjà une :

$$E_{\text{Potentielle de gravitation}} = mgh \tag{22.34}$$

En montant la pierre, nous accumulons de l'énergie.

De même, en tendant un arc ou en comprimant un ressort (ou en tirant dessus). Il existe un énergie potentielle élastique :

$$E_{Potentielle} = F\Delta r \tag{22.35}$$

Et si la force nécessaire pour tendre le ressort est constante :

$$E_{Potentielle} = \text{cste}.\Delta r \tag{22.36}$$

Si on est dans le domaine "linéaire" du ressort, la loi de Hooke est applicable :

$$F = k\Delta r \tag{22.37}$$

Alors

$$E_{\text{Potentielle élastique}} = \frac{1}{2}k(\Delta r)^2 \tag{22.38}$$

a) Énergie potentielle et travail

Une énergie Potentielle se note "U".

Toutes les forces ne sont pas associées à une énergie potentielle : par exemple les forces de frottements.

On dit d'une force qui est associée à une énergie potentielle qu'elle *dérive* d'un potentiel.

Si une force dérive d'un potentiel, on peut écrire la relation suivante :

Théorème 2 (Énergie potentielle et travail)**.**

$$W = -U \tag{22.39}$$

où :

— *U = l'énergie potentielle*

— *W = le travail de la force*

Pour nous convaincre de la nécessité de ce signe "moins", considérons la montée d'un objet depuis le sol jusqu'à une hauteur "h".

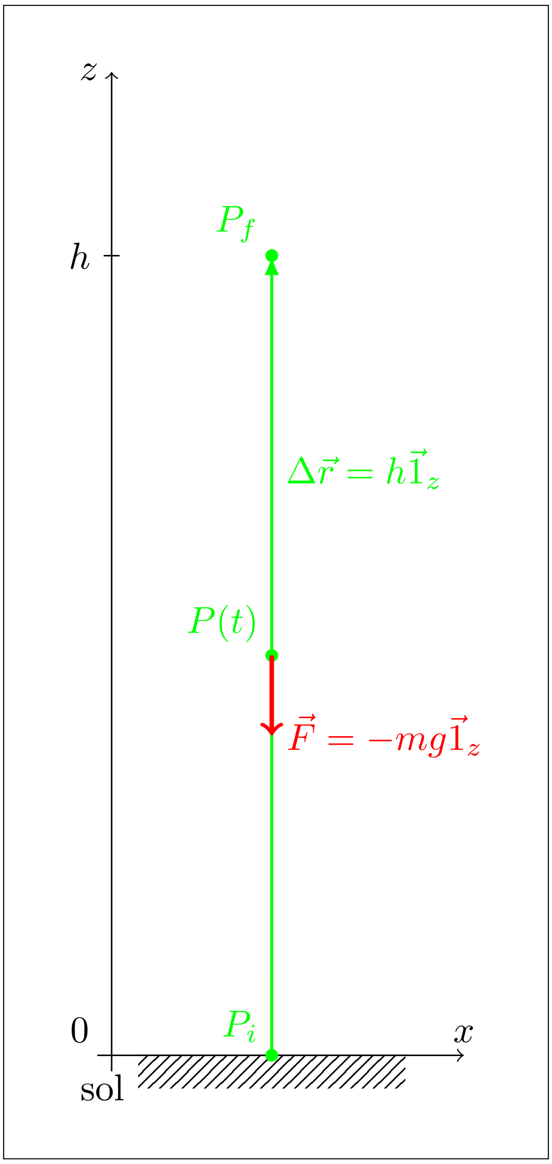


FIGURE 22.4 – Énergie potentielle et travail

Le déplacement est :

$$\Delta\vec{r} = h\vec{1}_z \tag{22.40}$$

La force est le poids :

$$\vec{F} = -mg\vec{1}_z \tag{22.41}$$

Le travail est donc :

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = -mgh \tag{22.42}$$

La variation d'énergie potentielle est par contre un gain :

$$U = mgh \tag{22.43}$$

On retrouve bien la relation : $W = -U$.

B Énergie cinétique

L'énergie de vitesse est nommée énergie cinétique.

Les statistiques d'accidents montrent que la mortalité croit avec le carré de la vitesse des véhicules impliqués !

a) Calcul

(i) Rappel MRUA Nous pouvons calculer la vitesse du mobile au moment de l'impact.
$\Delta r = 1/2at^2$, $v = a.t$ et donc $t = v/a$
Et donc

$$\Delta r = 1/2v^2$$

Si nous remplaçons $\Delta r par \Delta h$ dans la formule de l'énergie potentielle de gravitation, nous obtenons :

$$E_{cin.} = mg\Delta h = 1/2m.v^2 \tag{22.44}$$

C Application à la conservation de l'énergie

Nous savons que les énergies se transforment d'une forme dans une autre.
L'énergie potentielle s'est donc transformée en énergie cinétique.

$$E_{Tot.} = mg\Delta h(enhaut) = 1/2m.v^2(enbas) \tag{22.45}$$

En fait, l'énergie totale est restée constante à tout instant.

$$E_{Tot.} = mg\Delta h + 1/2m.v^2 \tag{22.46}$$

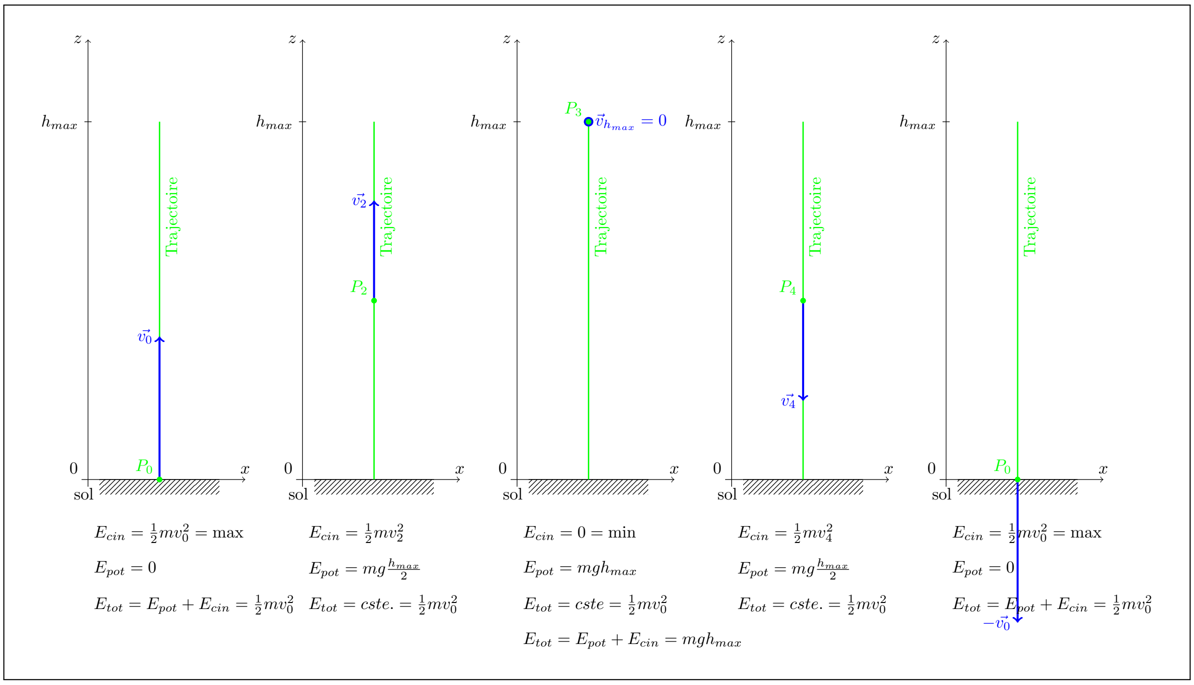


FIGURE 22.5 – Lancer d'une masse depuis le sol : bilan en énergie.

4 Exercices

Chapitre 23

Puissance

Sommaire

Introduction

Au quotidien ,nous disons d'un sportif qu'il est puissant, nous parlons d'une voiture puissante ....

Le concept de puissance permet de qualifier la production ou la consommation d'énergie de personnes ou de machines.

1 Illustration

Un haltérophile va soulever une masse de 100 kg à une hauteur de deux mètres en deux secondes.

Si un enfant doit effectuer la même tâche, il pourra le faire à condition de fractionner la masse à soulever (en "paquets" de 5 kg par exemple) et la même tâche lui prendra donc peut-être trois à quatre minutes (disons 200 s por fixer les idées) .

Le sportif comme l'enfant auront effectué le même travail mais en des temps différents.

On dira que le sportif est puissant.

2 Définition

L'exemple précédent permet de définir la puissance comme une énergie (ou un travail) sur la durée nécessaire pour produire ou consommer cette énergie.

La puissance se mesure en watt (W).

Définition 47 (Puissance)**.** Une puissance est le rapport entre une énergie et la durée nécessaire pour produire ou consommer cette énergie.

$$P = \frac{E}{t} \tag{23.1}$$

où

- P = la puissance (W)
- E = l'énergie (J)
- t = la durée (s)

3 Exemple

Un moteur de grue permet de soulever du sol une masse de 300 kg jusqu'à une hauteur de 20 m en deux minutes.

Si on prend un "g" de 9,81 $\mathrm{m\,s^{-2}}$, le travail effectué est de 58 860 J.

La puissance du moteur sera de 490,5 W.

4 Autres unités

A Chevaux

Omniprésente au 19ème siècle, la traction animale a amené l'utilisation d'unités qui ne sont pas partie du système SI.

a) Cheval vapeur français

Typiquement, un cheval va soulever une masse de 75 kg d'une hauteur d'un mètre en une seconde. Si on prend un "g" de 9,806 65 $\mathrm{m\,s^{-2}}$ (3ème Conférence générale des poids et mesures (CGPM) de 1901) , le travail effectué est de 735,498 75 J.

Définition 48 (Cheval vapeur français)**.** Un cheval vapeur français vaut 735,5 W.

b) Cheval vapeur anglais (hp)

Dans le système impérial britannique, un cheval va soulever une masse de 180 livres (une livre = 0,453 592 37 kg) à une vitesse de 3,0555 pieds par seconde (un pied = 0,3048 m). On prend aussi un "g" de 9,806 65 $\mathrm{m\,s^{-2}}$.

On parle de "horse power" (hp).

Définition 49 (Cheval vapeur impérial (hp))**.** Un cheval vapeur impérial (hp) vaut 746 W.

c) Cheval vapeur de chaudière

Aux États-Unis, les américains utilisent le cheval vapeur de chaudière.

Définition 50 (Cheval vapeur de chaudière)**.** Un cheval vapeur de chaudière vaut 9810 W.

5 Exercices

Chapitre 24

Quantité de mouvement

Sommaire

Introduction

Les lois de conservation sont des lois très importantes en physique.
Nous connaissons déjà quelques lois de conservation.
Ainsi, nous savons que sont conservées :
— la masse,
— la charge électrique,
— l'énergie.
Ici, nous allons découvrir une nouvelle grandeur associée à une loi de conservation : l'impulsion ou quantité de mouvement.

1 Définition et propriété

A Définition

Définition 51 (Quantité de mouvement (ou impulsion))**.** La quantité de mouvement ou impulsion est la grandeur vectorielle $\overrightarrow{p}$ égale au produit de la masse et de la vitesse d'un corps.

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} \tag{24.1}$$

où :
— $\overrightarrow{p}$ est la quantité de mouvement ($\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$),
— m est la masse (kg)
— et $\overrightarrow{v}$ est la vitesse ($\mathrm{m\,s^{-1}}$).

B Conséquence

Réécrivons le principe fondamental de la dynamique sous sa forme vectorielle :

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \tag{24.2}$$

La définition cinématique de l'accélération nous permet d'écrire :

$$\overrightarrow{F} = m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \tag{24.3}$$

Et donc

$$\overrightarrow{F} = \frac{\mathrm{d}(m\overrightarrow{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} \tag{24.4}$$

Propriété 5.

$$\overrightarrow{F} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} \tag{24.5}$$

Une force (totale non nulle) va donc être associée à une variation de la quantité de mouvement dans le temps.

Des changements rapides de vitesse, comme lorsqu'un ballon rebondit sur un mur, vont donc être associés à des forces importantes.

À contrario, si la force nette s' exerçant sur un corps est nulle, la quantité de mouvement sera constante :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{24.6}$$

Dans ce cas on dit que la quantité de mouvement est conservée.

Propriété 6 (Conservation de la quantité de mouvement 1)**.**
Si la force nette s' exerçant sur un corps est nulle, alors la quantité de mouvement de ce corps est constante.

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{p} = cste. \tag{24.7}$$

2 Forces internes, forces externes et quantité de mouvement

Si un seul corps est considéré, la notion d'impulsion ne nous apprend pas grand chose. Son grand intérêt se trouve dans l'étude de système de corps.

A Contexte : systèmes de particules

L' étude de "systèmes de particules" donne tout son sens à la notion de quantité de mouvement.

Définition 52 (Systèmes de particules)**.**
Nous entendrons désormais par "système de particules" un ensemble de corps dont l'étude peut se ramener à l'étude d'un ensemble de "points matériels".

Un ensemble de "masses ponctuelles" sera donc un système de particules.

Voici quelques exemples d' objets (au sens large) qui peuvent être traités comme des "systèmes de particules" :

— Les étoiles d' une galaxie isolée,
— les étoiles d' un amas globulaire,
— l'étoile, les planètes et les lunes d' un système planétaire,
— des atomes et molécules dans un gaz,
— des poussières dans une ampoule fermée,
— des billes sur un billard (on est alors à deux dimensions).

B Uniquement des forces internes

Considérons maintenant le cas où il n'y a pas de force extérieure sur le système de particule.

C'est une approximation qui est assez souvent réalisée.

Les particules ne subissent donc des forces ne résultant que de la présence des autres particules.

Alors, la particule "p_1" subit uniquement des forces des particules "p_2", "p_3", ..., "p_n".

La particule "p_2", à son tour, subit uniquement des forces des particules "p_1", "p_3", ..., "p_n".

a) Action réciproque

La particule "p_1" exerce sur "p_2" une force "$\vec{F}_{1\to 2}$".

La particule "p_2" exerce sur "p_1" une force "$\vec{F}_{2\to 1}$".

Mais le principe d'action réciproque nous apprend que :

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 1} \tag{24.8}$$

Ce raisonnement peut être étendu à *toutes* les paires de particules.

Mais alors pour *toutes* les forces internes, à chaque force d'une particule sur une autre va correspondre une force égale, de même direction et de sens opposé correspondant à la force de la deuxième particule sur la première.

C'est-à-dire :

$$\forall i, j : F_{ij} = -F_{ji} \tag{24.9}$$

b) Somme de forces internes

Faisons la somme de toutes les forces internes. La particule "i" agit sur "$n-1$" particules. Mais la force de "i" sur "i" est égale à zéro :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{ij} \tag{24.10}$$

Cette somme, à cause de la relation 24.9 p. 218, sera nécessairement égale à zéro !

$$\sum_{i} \sum_{j} F_{ij} = 0 \tag{24.11}$$

Pour s'en convaincre, on peut écrire toutes ces forces dans un tableau et appliquer la relation 24.9 p. 218.

Donc, si les seules forces considérées sont des forces internes, la somme des forces vaut zéro.

$$\sum F = 0 \tag{24.12}$$

c) Principe d'inertie

Si la somme des forces s'appliquant sur un système est nulle, le principe d'inertie est d'application.

$$\sum F = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = cste. \tag{24.13}$$

Cependant, le principe d'inertie s'applique à l'*ensemble* du système. C'est-à-dire à son centre de masse.

Les particules individuelles auront peut-être des comportements complexes. Mais l'ensemble du système aura, lui, un comportement très simple : il sera en MRU.

d) Variation de vitesse

Si le centre de masse du système est en MRU, la variation de vitesse du centre de masse est nulle.

$$MRU \Leftrightarrow \Delta v = 0 \tag{24.14}$$

Si la variation de vitesse du centre de masse est nulle, la variation de l'impulsion l'est aussi.

Ceci est cohérent avec l'équation 24.7 p. 217.

Loi 11 (Conservation de l'impulsion et forces internes)**.**
Si les seules forces s'appliquant à un système sont des forces internes, la quantité de mouvement du système est constante.

3 Chocs élastiques et chocs inélastiques

Lorsque deux solides entrent en contact, deux situations sont possibles.

Leur choc sera

— élastique

— ou inélastique.

A Chocs inélastiques

Imaginons que les deux objets soient des billes d'acier infiniment dures.

Les deux objets vont s'entrechoquer, échanger de l'énergie mécanique, puis continuer leur trajectoire.

Cependant, l'énergie mécanique totale ne sera pas modifiée.

Ce type de choc est appelé "*choc inélastique*".

B Chocs élastiques

Imaginons maintenant le choc entre deux boules de plasticines.

Les deux objets vont s'entrechoquer, échanger de l'énergie mécanique, *se déformer*, puis continuer (peut-être) leur trajectoire.

Chaque boule va exercer des forces qui vont déformer l'autre boule.

L'énergie mécanique totale sera modifiée. Une partie de cette énergie mécanique va être transformée en énergie interne dans la déformation. Les deux "boules" seront plus chaudes après la rencontre.

L'énergie *totale* du système sera constante mais pas l'énergie mécanique totale.

Ce type de choc est appelé "*choc élastique*".

a) Quantité de mouvement et chocs élastiques

Si l'énergie mécanique n'est pas conservée. Par contre, dans ce système de deux particules, la quantité de mouvement va être conservée puisque les seules forces en jeu sont des forces entre les parties du système.

Des calculs impliquant $m\vec{v}$ seront possibles.

C Chocs et conservation de la quantité de mouvement

Dans les deux types de chocs, la quantité de mouvement sera conservée.

Loi 12 (Choc et conservation de la quantité de mouvement)**.** *Dans un choc impliquant "n" objets, la quantité de mouvement totale avant et après le choc sera constante.*

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} + \ldots + m_n v_{ni} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} + \ldots + m_n v_{nf} \tag{24.15}$$

où :

— *les m sont les masses des objets* (kg)*,*

— *les v_i sont les vitesses initiales avant le choc* ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)*,*

— *les v_f sont les vitesses finales après le choc* ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)*.*

Cette loi est valable pour toute interaction, pas uniquement pour les chocs.

4 Exercices

Septième partie

Modèles de l'univers et gravitation universelle

Chapitre 25

Tailles de l'univers

Sommaire

Introduction

Nous recommandons ici la lecture du texte extrait de “patience dans l'azur”.

Réponses aux questions

- diamètre du Soleil : $1,4 \cdot 10^6 km$,
- diamètre de la terre : $1,2 \cdot 10^4 km$,
- distance terre-Soleil : $1,5 \cdot 10^8 km$,
- à l' échelle : si le Soleil fait 1m, diviser par $1,4 \cdot 10^9$: 107m
- distance de l' étoile la plus proche : : $4 \cdot 10^{13} km$,
- à l' échelle : si le Soleil fait 1m, diviser par $1,4 \cdot 10^9$: $2,5 \cdot 10^4$ km

1 Dimensions de l'univers

Le diamètre du Soleil est d'approximativement 1 392 000 km. Le diamètre de la Terre est proche de 12 740 km. Nous savons que la lumière du Soleil met approximativement 8 minutes pour nous atteindre.

Q. : Si le Soleil était un ballon de 1 m de diamètre, la Terre serait une bille d'un diamètre de 9 mm. Quelle serait la distance entre les 2 astres ?

R. : 100 m

Q. : A quelle distance serait alors l'étoile la plus proche ?

R. : 25 000 km

Tailles : Tableau

Biosphère :	10 km
Météores :	50 km
Lune :	380 000 km ($3,8.10^5$)
Mars :	$77.10^6 km$
Pluton :	6 milliards de km
Etoile la plus proche :	4,5 années lumières (a-l)
Centre de la voie lactée :	30 000 a-l
Diamètre de la voie lactée :	100 000 a-l
La galaxie d'Andromède :	2 millions d'a-l
La galaxie la plus lointaine connue :	10-15 milliards d'a-l

nombre d'étoiles visibles à lœil nu :	$5 \cdot 10^3$
nombre de grains de sable dans un 1 cm^3 :	$5 \cdot 10^3$
nombre d'étoiles dans la voie lactée :	$4 \cdot 10^{11}$
nombre de galaxies dans l'univers :	$1,3 \cdot 10^{11}$
nombre d'étoiles dans l'univers :	$5 \cdot 10^{22}$
nombre de grains de sable sur toutes les plages de la Terre :	$5 \cdot 10^{21}$

2 Caractéristiques des planètes

Voir dossier.

Chapitre 26

Géocentrisme et héliocentrisme

Sommaire

Introduction

Vous trouverez ici un court historique de la cosmologie occidentale : Comment "s'organisait" l'Univers selon les Anciens.

Les deux modèles principaux qui se sont "affrontés" au cours de l'histoire sont le géocentrisme et l'héliocentrisme.

Nous évoquons les principaux acteurs dans cet affrontement pour montrer une progression dans les points de vue.

1 Le modèle géocentrique

La Terre est fixe et constitue le centre du monde, les autres planètes tournent autour d'elle.

A Thalès de Milet (600 avant J.-C.)

Ce philosophe d'Asie Mineure voit la Terre comme une plate-forme reposant sur les océans qui, eux-mêmes, s'étendraient jusqu'à la voûte céleste.

B Anaximandre (550 avant J.-C.)

FIGURE 26.1 – La Terre est un cylindre chez Anaximandre.

Cet élève de Thalès de Milet constate que, si on se déplace à la surface de la terre ferme du nord vers le sud, la Terre est toujours courbée dans le même sens. Il en conclut que la Terre flotte librement dans l'espace sans aucun support. Il suppose que la Terre ressemble à un cylindre de hauteur finie et dont l'axe serait orienté suivant la direction est-ouest (Fig. 26.1 p. 226) .

C Pythagore (530 avant J.-C.)

Ce mathématicien vivant au sud de l'Italie observe que les navires sur la mer n'émergent que progressivement à l'horizon, au fur et à mesure qu'ils se rapprochent de la terre ferme et cela, quelle que soit la direction d'où ils viennent. La surface des mers serait sphérique et la Terre, dans l'espace, serait une grosse sphère (globe). Il fut le premier à attirer l'attention sur le fait qu'en dehors de la Lune et du Soleil, il existe 5 autres planètes de même forme que la Terre : Mercure (mercredi), Vénus (vendredi), Mars (mardi), Jupiter (jeudi) et Saturne (samedi). Partant de ces observations, il suppose que le monde serait formé d'un ensemble de sphères concentriques imbriquées les unes dans les autres et centrées sur la Terre immobile, chaque sphère étant animée d'un mouvement perpétuel, la dernière sphère étant celle des étoiles (théorie des sphères pythagoriciennes). L'ordre par rapport à la Terre serait Lune, Mars, Vénus, Soleil, Mercure, Jupiter, Saturne, Etoiles.

D Anaxagore (450 avant J.-C.)

Il confirme la théorie des sphères pythagoriciennes en observant la Lune. Cette dernière est un corps sphérique non lumineux qui tourne autour de la Terre et est éclairée par le Soleil. Le Soleil tourne également autour de la Terre mais à une plus grande distance (Fig. 26.2 p. 227)

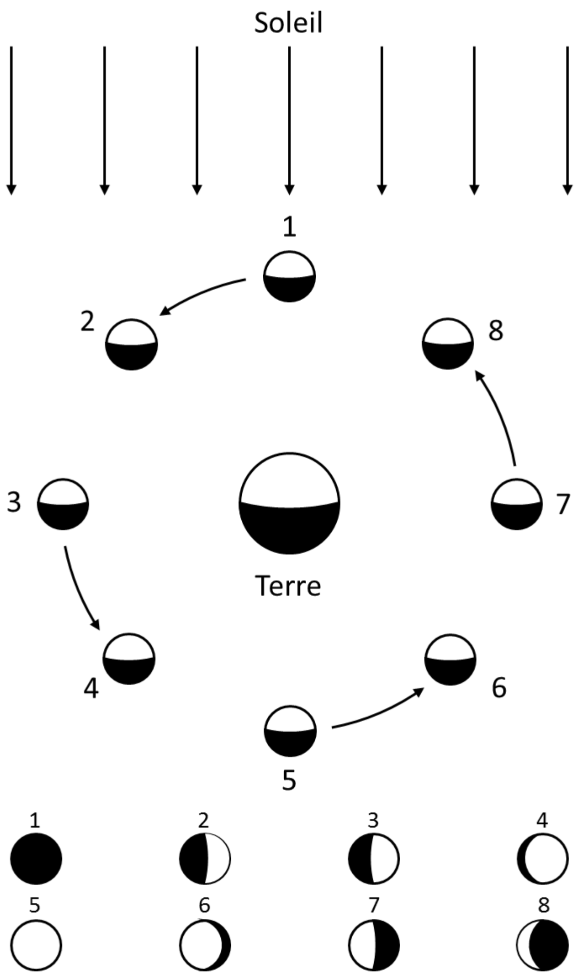


FIGURE 26.2 – Les phases de la Lune selon Anaxagore.

Lors de la nouvelle lune (1), la Lune se trouve entre la Terre et le Soleil.
Au début de la lunaison (2), on observe le 1er quartier.
Lors de la pleine lune (5), la Terre se trouve entre la Lune et le Soleil.
A la fin de la lunaison (8), on observe le dernier quartier.
Un cycle complet dure 29 jours et 1/2. C'est sur cette base qu'est né le premier calendrier avec 1 mois = 30 jours (± 1 jour).

E Hipparque (150 avant J.-C.)

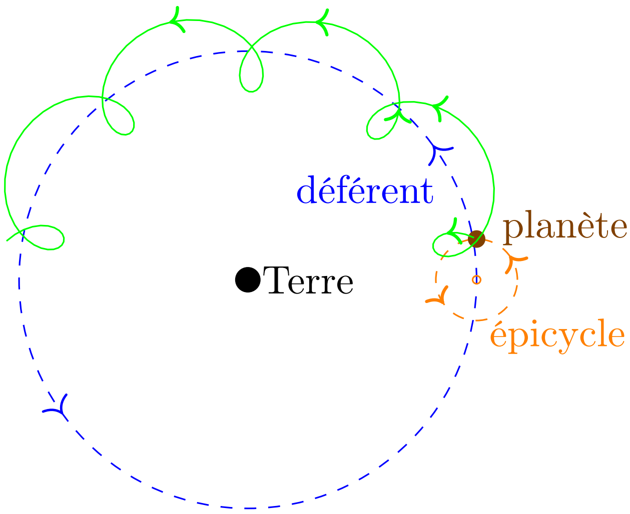


FIGURE 26.3 – Les épicycles selon Hipparque.

Il constate que le Soleil, en tournant autour de la Terre, se déplace sur une trajectoire circulaire excentrique par rapport à la Terre (Fig. 26.4 p. 228) .

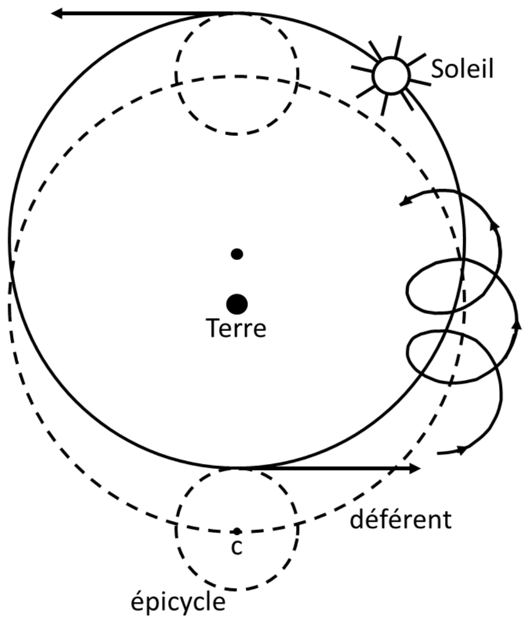


FIGURE 26.4 – Le Soleil selon Hipparque.

De plus, les planètes, sur leur trajectoire, décrivent des cercles. C'est le modèle des épicycles (Fig. 26.3 p. 228) .

F Ptolémée (120 après J.-C.)

Il confirme la thèse d'Hipparque et introduit une précision supplémentaire. Mercure et Venus, qui restent toujours au voisinage du Soleil, suivent leur trajectoire selon un épicycle dont le centre se situe sur une droite reliant la Terre au Soleil (Fig. 26.5 p. 229) .

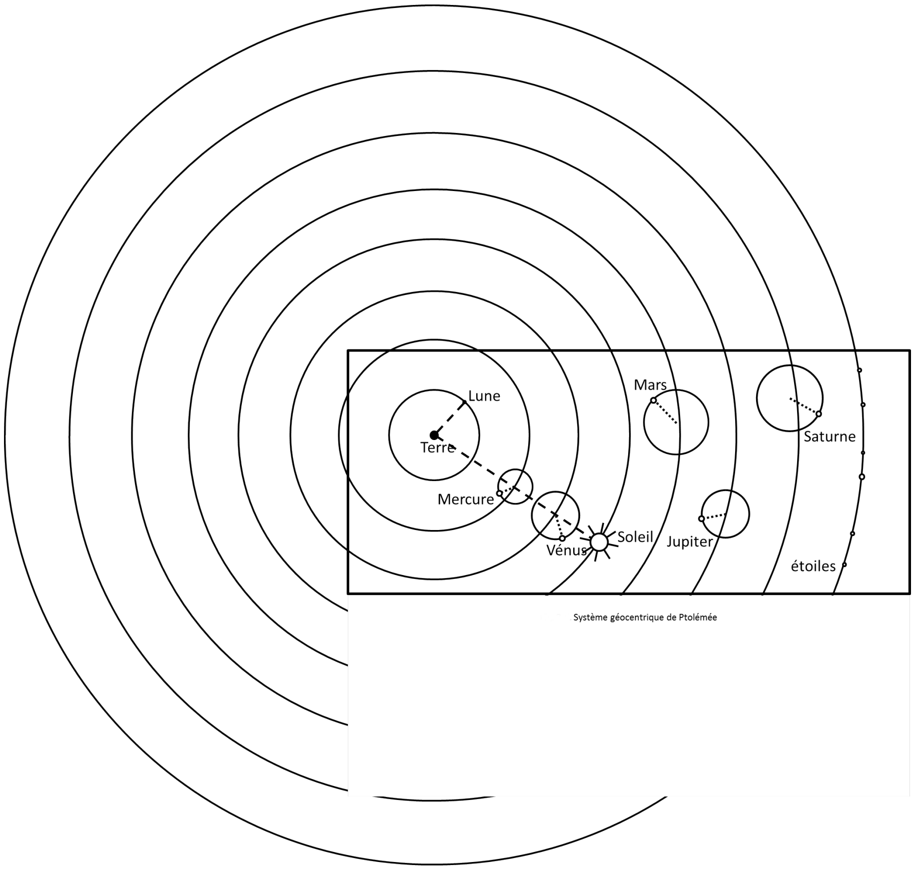


FIGURE 26.5 – Les épicycles selon Ptolemée.

G Conclusions

Le géocentrisme se base sur 3 postulats :
— la Terre est immobile et elle est le centre du monde ;
— les astres se déplacent sur des épicycles par rapport à la Terre ;
— il existe 2 mondes différents dans l'Univers : les corps terrestres et les corps célestes.

2 Le modèle héliocentrique

Le Soleil est le centre de l'Univers et les autres planètes tournent autour de lui.

A Aristarque de Samos (IIIe siècle avant J.C.)

Il disait que :
— la Terre tourne autour d'un axe nord-sud en 23h56' (en réalité 23 h 56' 04,09", c'est un jour sidéral) ;
— la Terre tourne autour du Soleil ;
— l'axe de rotation de la Terre est incliné par rapport à l'orbite terrestre de 23°.
Mais il ne fut pas écouté car le modèle géocentrique était trop bien implanté.

B Nicolas Copernic (Début XVIe siècle)

Il reprend l'idée des sphères concentriques de Pythagore en plaçant le Soleil au centre du système.

Il disait que :

- le Soleil est immobile et au centre de l'Univers ;
- les planètes (Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter et Saturne) tournent autour du Soleil suivant des trajectoires propres ;
- la sphère des étoiles est fixe ; leur mouvement proviendrait de la rotation de la Terre sur elle-même.

Ce mathématicien et astronome polonais utilise le terme "orbite" pour définir la forme des trajectoires parcourues par les planètes. Ces trajectoires sont circulaires et uniformes.

C Tycho-Brahé (Fin XVIe siècle)

Ce Danois décida de faire un relevé précis des positions successives de toutes les planètes afin d'établir de nouvelles tables astronomiques. Il détermina ainsi la longueur de l'année à une fraction de seconde près et contribua à la réforme du calendrier.

Il est partisan d'un modèle géo-héliocentrique : les planètes tournent autour du Soleil qui lui-même tourne autour de la Terre qui est immobile. La Terre reste pour lui le centre de l'Univers. Ses arguments sont basés sur l'observation : Il n'observe pas de parallaxe des étoiles à six mois d'écart.

D Kepler (1571-1630)

Ce mathématicien, élève de Tycho-Brahé, remplaça les anciennes trajectoires circulaires de Pythagore par des trajectoires elliptiques. Il en tira trois lois :

a) Loi n° 1

Chaque planète se déplace sur une orbite elliptique dont le Soleil occupe un des foyers (Fig. 26.6 p. 230).

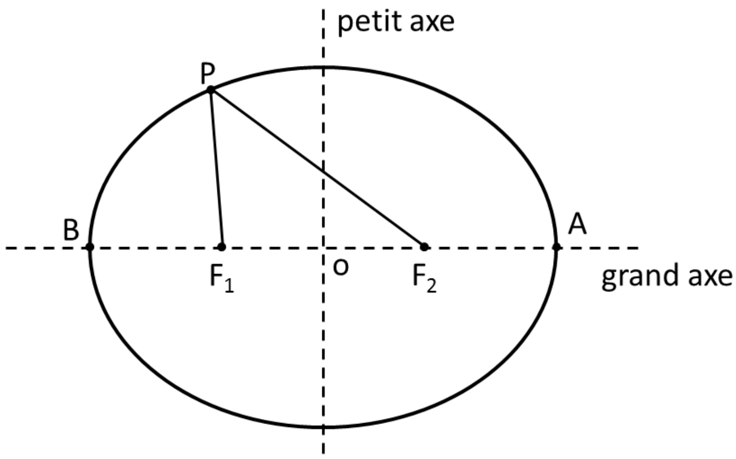


FIGURE 26.6 – Une ellipse : les distances depuis ses foyers jusqu'à un point de sa périphérie.

N.B. Une ellipse est constituée par un ensemble de points P tels que la somme des distances par rapport aux foyers ($\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{AB}$).
o est le centre de l'ellipse.
F_1 et F_2 sont les foyers de l'ellipse.
Si le Soleil est en F_1, P est le périgée ou périhélie (point le plus proche du Soleil) et A est l'apogée ou aphélie (point le plus éloigné du Soleil).

b) Loi n° 2

Une ligne reliant le Soleil à la planète balaie des aires égales en des laps de temps égaux (Fig. 26.7 p. 231)
.

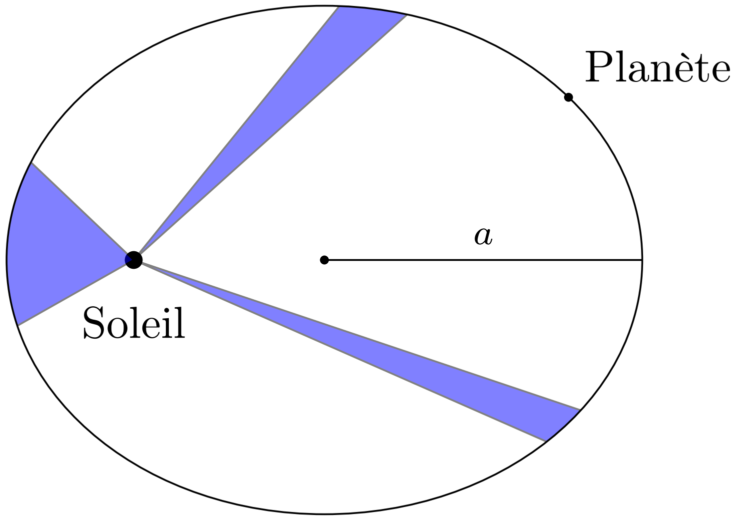


FIGURE 26.7 – Une planète balaie des aires égales en des temps égaux.

Lorsqu'une planète est proche du Soleil, sa vitesse est plus grande que lorsqu'elle en est éloignée.

c) Loi n° 3

Le carré de la période de révolution T est proportionnel au cube du rayon moyen R :

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{ constante pour toutes les planètes tournant autour du Soleil}$$

avec

$$R = \frac{r_{\text{min}} + r_{\text{max}}}{2}$$

Prenons un exemple : Jupiter est à une distance moyenne du Soleil qui est approximativement cinq fois celle de la Terre. La distance moyenne Terre-Soleil est appelée une unité astronomique :1 ua.

Et donc :

$$\frac{T^2_{\text{Terre}}}{R^3_{\text{Terre}}} = \frac{T^2_{\text{Jupiter}}}{R^3_{\text{Jupiter}}}$$

$$\frac{(1\text{an})^2}{(1\text{ua})^3} = \frac{T^2_{\text{Jupiter}}}{(5\text{ua})^3}$$

$$T^2_{\text{Jupiter}} = 5^3$$

$$T_{\text{Jupiter}} = \sqrt{125} \simeq 11\text{ans}$$

Ce qui correspond bien au temps mis par Jupiter pour effectuer une révolution autour du Soleil.

Ce qui est remarquable, c'est que cette loi peut s'appliquer dès qu'un objet est suffisamment massif pour que d'autres soient en orbite autour de lui (comme Jupiter et ses lunes, ou encore comme la Terre, la Lune et les satellites artificiels). La constante va cependant être différente selon le corps central. Mais ceci, comme les lunes de Jupiter n'avaient pas encore été observées, et qu'il faudra attendre le vingtième siècle pour que la Terre ait des satellites artificiels, Kepler ne le savait pas !

d) En résumé

Ces 3 lois qui s'appliquent aux planètes et à leurs satellites restent empiriques. Elles disent comment les planètes tournent autour du Soleil mais sans en donner les causes. Elles laissent cependant entendre qu'un principe commun est à l'œuvre pour toutes les planètes du Système solaire.

E Galilée (1564-1642)

Ce philosophe et astronome italien insistait surtout sur l'importance de partir de l'expérience pour extraire des hypothèses et non pas de se baser sur des idées préconçues.

Son conflit avec l'Église dura plus de 20 ans. Après son procès, il resta en résidence surveillée pendant les douze dernières années de sa vie.

Il construisit une lunette astronomique et observa notamment la surface irrégulière de la Lune et les taches sur le Soleil, ce qui remit en cause la perfection des astres supposée par certains.

Il fut un des premiers à observer les quatre plus grosses lunes de Jupiter et leurs mouvements autour de la planète géante. Ce qui suggérait, entre autres, que la Lune tournait autour de la Terre. Ces quatre lunes (Io, Europe, Ganymède et Callisto) sont d'ailleurs appelées les lunes galiléennes de Jupiter.

Chapitre 27

La gravitation universelle

Sommaire

Introduction

Ici, nous développons la formulation de la loi de gravitation universelle.

Après avoir nous être "mis dans les bottes de Newton" et avoir suivit le cheminement de son raisonnement pour découvrir la loi, nous allons énoncer sa loi et en voir quelques conséquences.

Nous allons ainsi "peser" la Terre, le Soleil ...

1 Découverte de la loi de Newton (17ème siècle)

A Question

La question que Newton se pose est la suivante : "Comment se fait-il que la Terre entraîne la Lune avec elle dans son mouvement annuel autour du Soleil ?"

B Observations

Newton raisonne ensuite sur des observations (la fameuse pomme) :

"Les corps lâchés à proximité de la surface de la Terre tombent. En l'absence de frottements, le mouvement est un MRUA dont la trajectoire est verticale et caractérisé par une accélération "g" identique pour tous les objets."

La valeur de g varie avec l'altitude et la latitude.

Newton considère que la Terre exerce une force d'attraction (pesanteur) sur les objets situés à proximité de sa surface ; cette force est dirigée vers le centre de la Terre et vaut $P = m \cdot g$. Son intensité est proportionnelle à la masse des objets attirés.

C Hypothèse : Fin de la dualité Terre-Ciel

La Terre attire la Lune comme elle attire tous les corps matériels situés à sa surface. Les corps terrestres et les corps célestes obéissent aux même lois.

La Lune est sans doute un corps matériel de même type que les corps terrestres.

Pour tester cette hypothèse, basons-nous sur deux exemples :

a) Trajectoire d'un objet lancé obliquement à la surface de la Terre.

Lorsqu'on lance obliquement un projectile à la surface de la Terre (Fig. 27.1 p. 235), on observe la trajectoire 1. En l'absence de pesanteur, le mouvement serait de type **MRU** comme sur la trajectoire 2.

Si on admet que la Lune se meut dans le vide, et si la Lune n'était pas attirée par la Terre, elle devrait être animée d'un MRU et s'éloignerait continuellement de la Terre, ce qui n'est pas le cas. La pesanteur doit donc entraver son MRU.

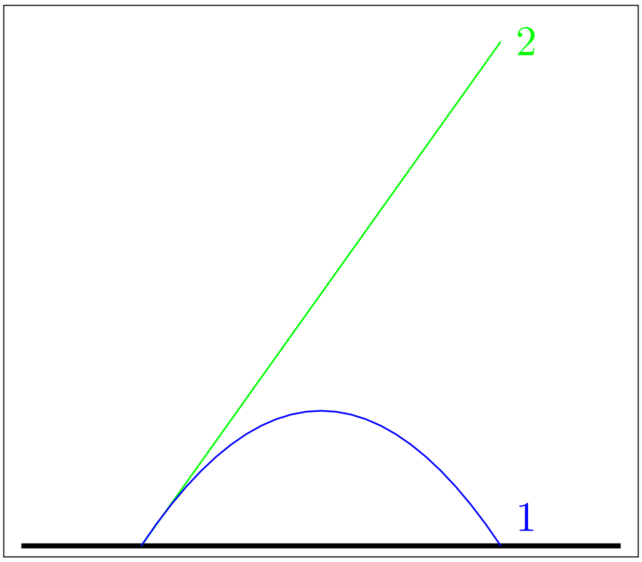


FIGURE 27.1 – Trajectoires avec et sans gravité lors d'un lancer depuis le sol.

b) Trajectoire d'un corps lancé horizontalement à partir d'une grande hauteur au-dessus de la surface de la Terre avec des vitesses différentes

Newton fait ensuite "l'expérience de pensée" suivante : Il imagine de lancer des objets depuis une très haute montagne en leur donnant une vitesse horizontale d'abord nulle puis de plus en plus grande.

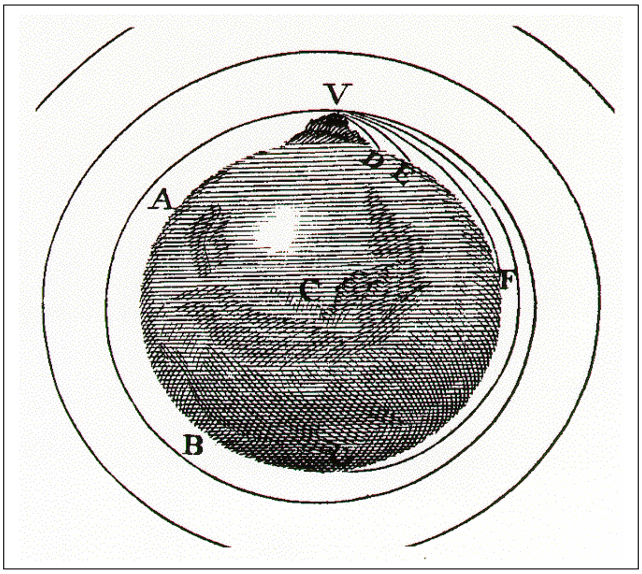


FIGURE 27.2 – Trajectoires d'un objet lancé d'une grande hauteur selon Newton.

Soit un corps lancé à une distance très grande de la surface de la Terre, ⊥ à la verticale avec des vitesses ± grandes (Fig. 27.2 p. 235).

Si la vitesse initiale était nulle ou trop petite, le corps tomberait suivant la verticale. C'est ce qu'on appelle une "chute libre".

Plus la vitesse initiale est grande (D et E sur la figure 27.2), plus la trajectoire du corps sera allongée. On est alors dans le cas du "tir horizontal".

Si la vitesse initiale grandit encore, l'objet commence à tomber "sur le côté" de la Terre (F sur la figure 27.2) .

Pour des vitesse initiales très grandes, la trajectoire du corps devient presque circulaire (en fait elliptique).

Or la lune ne tombe jamais sur la Terre, elle la suit dans son déplacement.

c) Conclusions

La trajectoire de la Lune est une trajectoire elliptique dont l'équilibre dépend de 2 causes :

— la tendance naturelle à perpétuer un mouvement initial : si cette seule cause était déterminante, la Lune s'éloignerait continuellement de la Terre.

— la tendance à se rapprocher de la surface de la Terre sous l'effet de la pesanteur : la Lune aurait tendance à s'écraser sur la Terre si seule la force de gravité était en jeu.

D Conséquences

a) La Terre attire la Lune

Considérant que la Lune reste "attachée" à la Terre en décrivant autour d'elle une trajectoire quasi circulaire, Newton conclut qu'une force attractive devrait lui être appliquée pas trop grande pour ne pas l'entraîner de son orbite vers la Terre ni trop petite car elle ne ferait pas dévier suffisamment la Lune d'un trajet en ligne droite.

La Terre exerce sur la Lune une force F_{T-L} d'attraction gravifique, analogue à la force de pesanteur que subit un corps quelconque prés de la surface de la Terre, et qui est orientée vers le centre de la Terre. Sa grandeur est proportionnelle à la masse m_L de la Lune et est inversement proportionnelle au carré de la distance r_{T-L} qui sépare la Lune du centre de la Terre. La grandeur de cette force est donc donnée par la relation

$$F_{T-L} = k\frac{m_L}{r^2_{T-L}} \text{ où } k = \text{ une constante}$$

b) Le Soleil attire les planètes

Puisque le mouvement des planètes autour du Soleil est analogue au mouvement de la Lune autour de la Terre, nous admettons que le Soleil exerce sur chacune des planètes une force F_{S-P} d'attraction gravifique qui est orientée vers le Soleil. Sa grandeur est proportionnelle à la masse M_P de la planète considérée et inversément proportionnelle au carré de la distance R_{S-P} qui la sépare du Soleil :

$$F_{S-P} = K\frac{M_P}{R^2_{S-P}} \text{ où } K = \text{ une autre constante}$$

c) Lien avec les lois de Kepler : pourquoi une loi en $1/d^2$

Comme la force de gravité décroît avec la distance séparant les deux objets étudiés, l'expression donnant la grandeur de cette force doit être inversement proportionnelle à cette distance. Kepler avait imaginé une force en "$1/d$".

Mais Newton connaît la première loi de Kepler.

Rappelons la première loi de Kepler :

Chaque planète se déplace sur une orbite elliptique dont le Soleil occupe un des foyers (Fig. 27.3 p. 237)

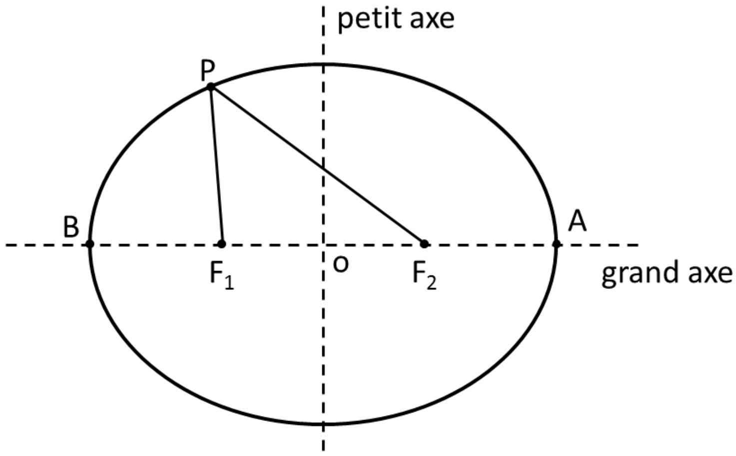


FIGURE 27.3 – Une orbite elliptique : le soleil occupe un des foyers (F_1 ou F_2) et pas le centre O.

Soit d la distance séparant deux corps dont l'un est beaucoup lus massif que l'autre, si la loi d'attraction était en $1/d$, l'objet le plus massif devrait se trouver au centre de l'ellipse. Si, par contre, la force est en $1/d^2$, l'objet le plus massif est à un des foyers. Comme le Soleil est à un des foyers, Newton a déterminé que la loi d'attraction devait être en $1/d^2$!

2 Loi de la gravitation universelle

A Formulation

Deux corps matériels ponctuels de masse m et m' s'attirent mutuellement avec une force dont l'intensité est proportionnelle à chacune de ces masses et inversément proportionnelle au carré de la distance r qui les sépare.

Cette force vaut :

$$F = G\frac{m \cdot m'}{r^2} \text{ où } G \text{ est une C}^{\text{ste}} \text{ universelle valant } 6.67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \tag{27.1}$$

avec F en N, m et m' en kg et r en m^2.

B Conséquences

— Tous les corps matériels exercent les uns sur les autres une force gravifique.
— La loi de l'attraction universelle est une loi d'attraction à distance qui s'exerce même à travers le vide.
— Cette loi est valable où que se trouve les corps considérés dans l'Univers.
— La force d'attraction gravitationnelle n'a pas de limite mais elle décroît rapidement lorsque la distance entre les corps augmente (loi en $1/d^2$).
— La gravité n'est observable que si un des corps est très massif.

C Applications

a) La vitesse orbitale des satellites

Les satellites tournent autour de la Terre conformément aux lois de Kepler. Si l'on pense au fait que la Lune a une période de révolution de 27,3 jours, on peut s'étonner que Spoutnik I, 1er satellite artificiel mis en orbite en 1957 par les Soviétiques, avait une période de révolution de 96 minutes.

Cela provient du fait que ce satellite artificiel était beaucoup plus près de la Terre que notre satellite naturel. Le "pouvoir attractif" de la Terre y est donc beaucoup plus grand et pour que Spoutnik puisse rester en orbite, il fallait qu'il se déplace à une vitesse très grande. Il suivait une trajectoire elliptique très allongée, descendant jusqu'à environ 230 km et montant jusqu'à environ 900 km au-dessus de la surface de la Terre.

b) Les satellites géostationnaires et géosynchrones

Un satellite géostationnaire tourne autour de la Terre en gardant une position (pratiquement) constante par rapport à celle-ci. Il est donc particulièrement adapté pour relayer les télécommunications et les émissions de télévision sans variations de puissance.

Le premier satellite géostationnaire commercial était "Early Bird" (USA, 1965). Son altitude était de 35600 km.

Pour rendre un satellite géostationnaire, on doit le placer sur une orbite équatoriale circulaire, à une altitude assez grande pour que sa période de révolution T soit égale à un jour sidéral. Il tourne alors à la même vitesse angulaire que la Terre et reste donc au-dessus d'un lieu donné sur la surface de la Terre .

Les lancements principaux ont été effectués par la NASA (USA) de Cap Canaveral (Floride) et par l'Agence spatiale Européenne de Kourou (Guyane française).

Un satellite géosynchrone a également une période de rotation égale à un jour sidéral, mais son orbite est inclinée par rapport à l'Équateur et elle est généralement elliptique . Il se présente donc chaque jour à la même heure au-dessus du même endroit, mais n'y reste pas continuellement.

3 Applications

Un des "drames" de la vie de Newton fût que sa constante de gravitation universelle "G" ne fût déterminée qu'après sa mort par Cavendish. Certes il estima assez bien la valeur de "G" mais la technologie qui permit de mesurer cette valeur n'était pas assez précise de son vivant.

A La masse de la Terre

Le calcul qui suit a, en son temps, fait la “une” du “Times” de Londres : “On a pesé la Terre”.

Ce calcul repose sur un raisonnement très simple : Le poids d' un objet à la surface de la Terre est causé par l' interaction de gravité entre cet objet et la Terre. La force “poids” de ce corps et la force de gravité entre le corps et la Terre sont égales.

- Données :
  - La masse de l'objet m
  - la distance entre l'objet et le centre de la Terre est déterminé via la circonférence : $Circ \simeq 40\,000\ (km) = 4.10^7 (m)$
  - $g = 9{,}81 m/s^2$
- Inconnues : La masse de la Terre = M_T
- Formules :
  - $P = m \cdot g$ et $P = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{d^2}$
  - $R = \frac{Circ}{2\pi}$
- Solution :
  - $d = R = \frac{Circ}{2\pi} = \frac{4.10^7}{2\pi} \simeq 6{,}366 \cdot 10^6\, m$
  - $m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{d^2}$

- $g = G \cdot \frac{M_T}{d^2}$
- $M_T = g \cdot \frac{d^2}{G}$
- $M_T = 9,81 \cdot \frac{(6,366 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \simeq 6 \cdot 10^{24} kg$

B La masse du Soleil

La force centripète F_C qui maintient la Terre sur son orbite autour du Soleil est la force de gravité F_G. Il faut donc égaler ces deux forces comme on l'avait fait pour calculer la masse de la Terre.

- Données :
  - La masse de la Terre m_T
  - La masse du Soleil M_S
  - la distance entre le Soleil et la Terre est approximativement : $R \simeq 150\,000\,000\ (km) = 1,5.10^{11} (m)$
  - La période de révolution de la Terre autour du Soleil = 1 an = $365 \cdot 24 \cdot 3600 s = 3,1536 \cdot 10^7 s$
- Inconnues : M_S
- Formules :
  - $F_G = G \cdot \frac{m_T \cdot M_S}{R^2}$
  - $F_c = m_T \omega^2 R$
  - $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (la vitesse angulaire)
- Solution :
  - $F_c = m_T R 4\pi^2 \frac{1}{T^2}$
  - $F_c = F_G$
  - $m_T R 4\pi^2 \frac{1}{T^2} = G \cdot \frac{m_T \cdot M_S}{R^2}$
  - $R 4\pi^2 \frac{1}{T^2} = G \cdot \frac{M_S}{R^2}$
  - $M_S = 4\pi^2 \frac{1}{G} \frac{R^3}{T^2}$

    Remarquons ici que la masse du Soleil est inversement proportionnelle à la constante de Kepler ($\frac{T^2}{R^3}$) ! (voir le point a) p. 239)
  - $M_S = 4\pi^2 \frac{1}{G} \frac{1}{K_{\text{Kepler}}}$
  - $M_S = 4 \cdot 9,87 \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-11}} \frac{(1,5.10^{11})^3}{(3,1536 \cdot 10^7)^2}$
  - $M_S = 4 \cdot 9,87 \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-11}} \frac{(1,5)^3.10^{33}}{(3,1536)^2 \cdot 10^{14}}$
  - $M_S = 4 \cdot 9,87 \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-11}} \frac{(1,5)^3.10^{33}}{(3,1536)^2 \cdot 10^{14}}$
  - $M_S = 4 \cdot 9,87 \frac{1}{6.67 \cdot (3,1536)^2} \cdot (1,5)^3 \cdot 10^{+11} \cdot 10^{33} \cdot 10^{-14}$
  - $M_S = 4 \cdot 9,87 \frac{1}{6.67 \cdot (3,1536)^2} \cdot (1,5)^3 \cdot 10^{+11} \cdot 10^{33} \cdot 10^{-14}$
  - $M_S \simeq 3 \cdot 10^{30} kg$

a) La constante de Kepler

C'est la masse de l'objet "dominant" qui détermine la constante de Kepler dans sa troisième loi. Des relations en "T^2/R^3" existent dès qu'un objet est en orbite autour d'un autre. Ainsi, il est possible de déterminer la masse de Jupiter en connaissant la période et le rayon de révolution d'une de ses lunes. Une "troisième" loi de Kepler sera d'application mais avec une constante qui sera liée à la masse de Jupiter !

C Autres calculs possibles

La même démarche que celle utilisée pour le Soleil peut être utilisée pour déterminer les masses des planètes possédant une lune, des étoiles doubles ou du trou noir au centre de notre galaxie.

Huitième partie

Annexes

Annexe A

Listes diverses

Liste des tableaux

Table des figures

Table des théorèmes, définitions et autres

Annexe B

Bibliographie

Annexe C

Index

Annexe D

Table des matières

Table des matières