

La leçon perdue de Feynman

IRPHY-Astro

25, 26 et 27 Mars 2022

Yves A. Delhaye

5 avril 2022 15:12

Résumé

Nous revisitons "la leçon perdue de Feynman" traitant des orbites des planètes telles que traitées par Newton dans ses "Philosophiae naturalis principia mathematica" : comment déterminez les orbites des planètes sans équations différentielles.

Introduction

Ce travail a pour origine une [capsule vidéo](#) de la chaîne youtube "minutephysics" avec [Grant Sanderson](#) comme présentateur invité.

La chaîne youtube "[3blue1brown](#)" de Grant Sanderson est elle-même remarquable, il s'agit plus de mathématiques mais je vous conseille de la consulter.

Cette capsule a elle-même pour origine le livre¹ "[Feynman's lost lecture](#)" de [David L. & Judith R. Goodstein](#).

La "leçon perdue" de Feynman est à son tour basée sur un sujet traité dans les "[Philosophiae naturalis principia mathematica](#)" d'Isaac Newton : le mouvement orbital des planètes autour du Soleil.

Les lois de Képler sont justifiées par les lois de Newton. La démonstration se veut purement géométrique et vise donc à s'abstenir d'utiliser l'analyse au sens de "calcul différentiel et intégral".

1 Première démarche

Je vous demanderai de me faire confiance et de me suivre dans les démarches que je vous propose. Ce qui en émergera nous fera connaître à chaque étape un moment de "aha-erlebnis".

1. GOODSTEIN, *Feynman's lost lecture : the motion of planets around the sun.*

A Enveloppe

Nous allons réaliser une première figure. Celle-ci nous conduira à différentes déductions. Finalement nous aborderons quelques variantes.

a) Une première figure

Prenez une feuille A4 (ou plus grande) et tracez un cercle dont le centre est approximativement au milieu de la feuille et le diamètre un peu inférieur à la largeur de la feuille.

Tournez la feuille en format "paysage" (juste pour le confort).

Prenez un point n'importe où à l'intérieur du cercle.

Le résultat sera plus "esthétique" si vous prenez ce point sur une droite horizontale passant par le centre "O" du cercle à approximativement quatre cinquième ($\frac{4}{5}$) du rayon depuis le centre. Mais cette distance peut-être quelconque.

Nous nommerons ce point " F_1 "².

Tracez maintenant un segment passant de ce point jusqu'à la circonférence du cercle.

Nommons l'intersection de ce segment avec la circonférence " Q_1 ".

Tracez la bissectrice de ce segment. Il est inutile de tracer la bissectrice à l'extérieur du cercle.

Nommons l'intersection de cette bissectrice et du segment " M_1 ".

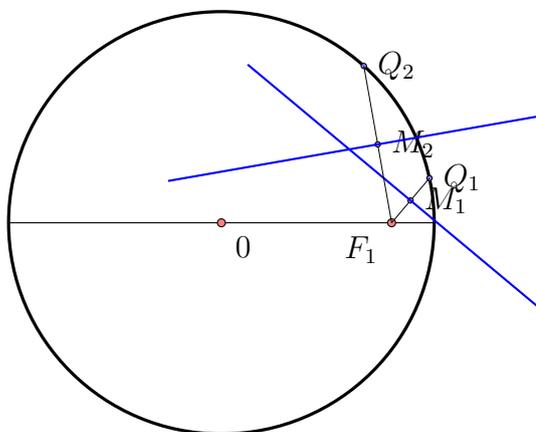


FIGURE 1 – Premières étapes de la figure.

Répétez l'opération une vingtaine ou une trentaine de fois.

2. Comme vous pouvez vous en douter, ce nom n'est pas choisi au hasard.

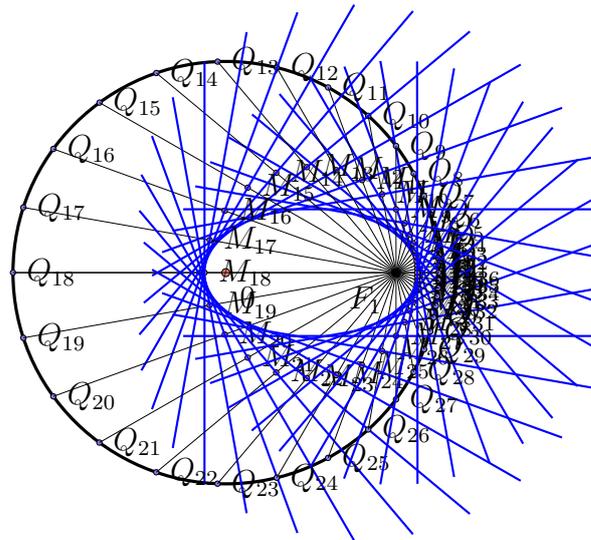


FIGURE 2 – Enveloppe des bissectrices.

L'enveloppe des bissectrices forme une figure bien connue.

B Avec des points

Mais comment prouver que la figure formée par l'enveloppe est une ellipse ?

Pour arriver à cela, commençons par tracer des points sur la circonférence de notre "ellipse".

Reprenons la figure précédente, mais, pour la clarté des opérations, en prenant moins de points.

Cette fois nous allons relier les points "Qi" au centre "O" du cercle.

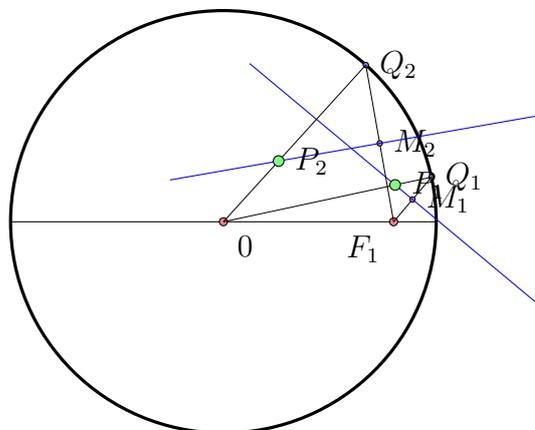


FIGURE 3 – Ellipse : relier les points "Qi" au centre "O".

À chaque fois, nommons " P_i " l'intersection de la bissectrice avec ce nouveau segment " OQ_i ".

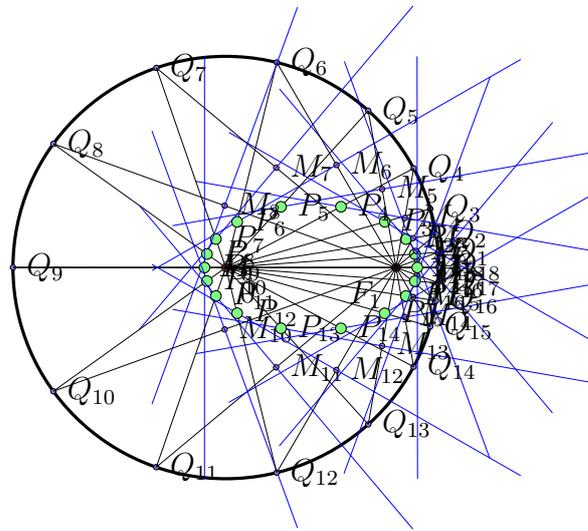


FIGURE 4 – Ellipse : les points " P_i ".

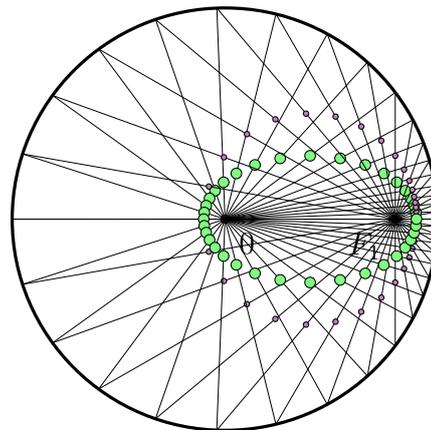


FIGURE 5 – Ellipse : juste les points " P_i ".

a) Démonstration

Démontrons maintenant que la figure construite par les points est bien une ellipse.

(i) Triangle F_1PQ

Sur notre figure, traçons maintenant un des triangles $F_1P_iQ_i$. Ce qui sera vu ici est généralisable à tous les triangles construits sur le même principe dans cette figure.

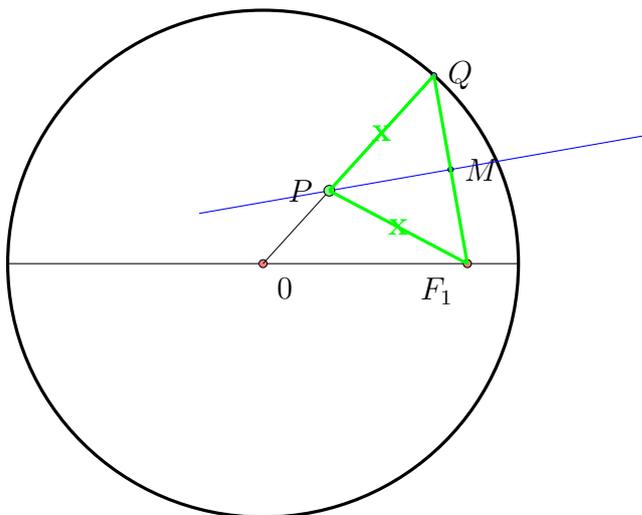


FIGURE 6 – Ellipse : Triangle F_1PQ .

Comme le sommet P se trouve sur la médiatrice du segment F_1Q , le triangle F_1PQ est isocèle. Le segment OQ est un rayon du cercle.

Donc

$$\begin{aligned} & \|PQ\| = \|PF_1\| && (1) \\ \text{Et comme} & \|OQ\| = R && (2) \\ & \iff \|OP\| + \|PQ\| = R && (3) \\ \text{Dès lors} & \|OP\| + \|PF_1\| = R && (4) \\ & && (5) \end{aligned}$$

La somme des distances de P aux points O et F_1 est constante et égale au rayon R du cercle. Ce qui correspond à la définition "du jardinier" de l'ellipse.

Les points P_i forment bien une ellipse.

□

(ii) Droite PM

Si nous prenons un point P' distinct de P sur la droite PM , comme cette P est sur le rayon du cercle, alors

$$\begin{aligned} & \|OP'\| + \|P'Q\| > R && (6) \\ \text{et donc} & \|OP'\| + \|P'F_1\| > R && (7) \end{aligned}$$

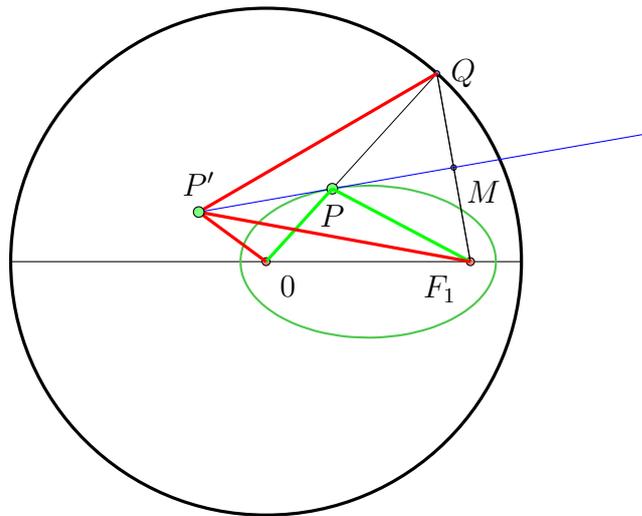


FIGURE 7 – Ellipse : $F_1P'Q > R$.

Donc tout point P' distinct de P est extérieur à l'ellipse.

Si, de plus, P est le seul point de la droite PM à être en contact avec l'ellipse, alors la droite PM est tangente à l'ellipse en P .

C Variante

Prenons maintenant le point " F_1 " à l'extérieur du cercle.

Que se passe-t-il ?

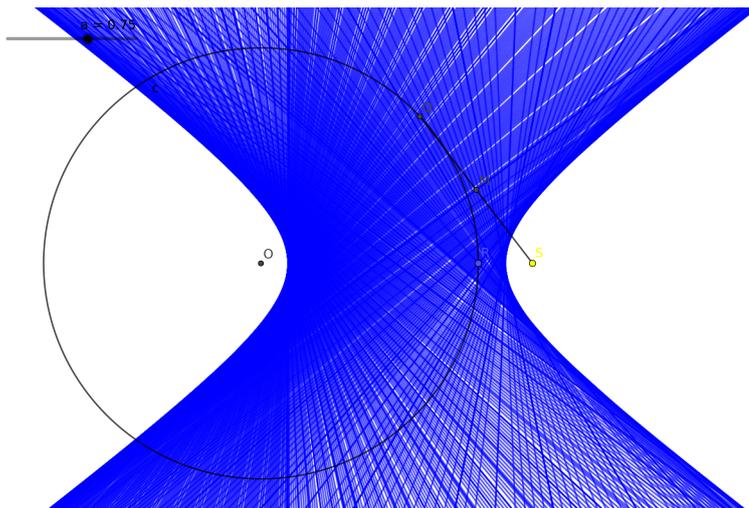


FIGURE 8 – Point " F_1 " à l'extérieur du cercle.

D Les machines à dessiner des coniques

Cette manière de construire des coniques était plus courante à l'époque de Kepler et Newton qu'elle ne l'est maintenant.

Souvent des "machines" servaient à tracer ces courbes.

La méthode décrite précédemment est celle de "l'ellipsographe à cercle directeur".

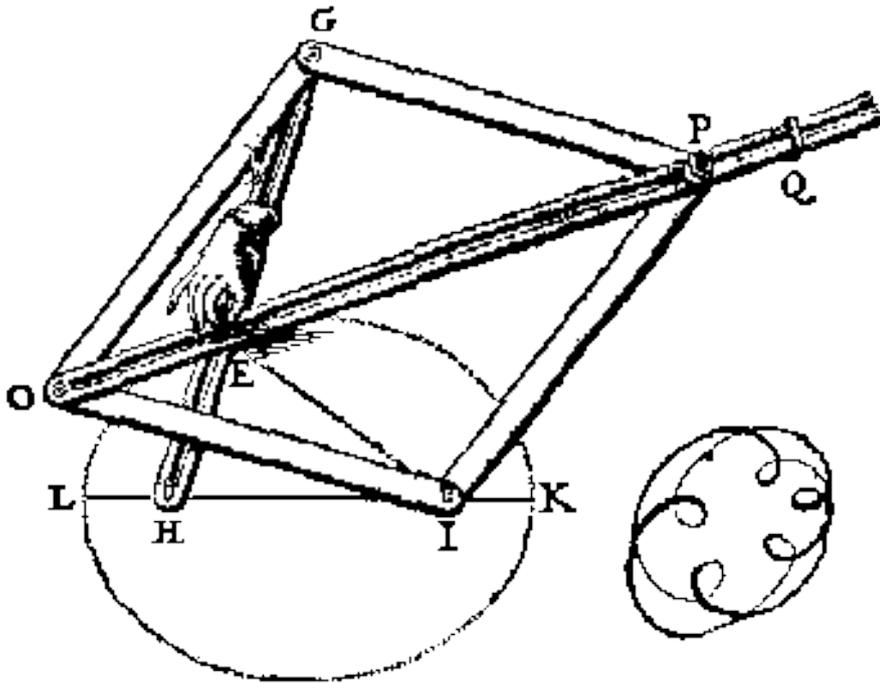


FIGURE 9 – Ellipsographe de van Schooten (1646).

Des machines de ce type pouvaient servir à tailler lentilles et miroirs.

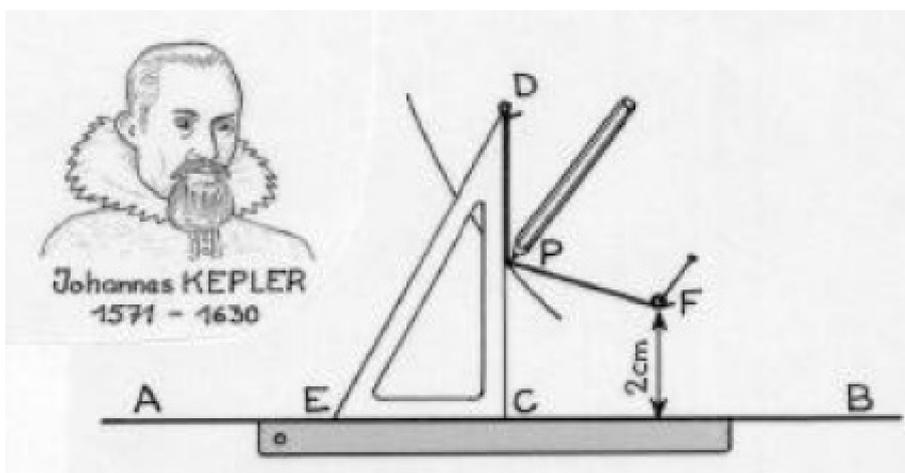


FIGURE 10 – "Machine" à Parabole de Kepler.

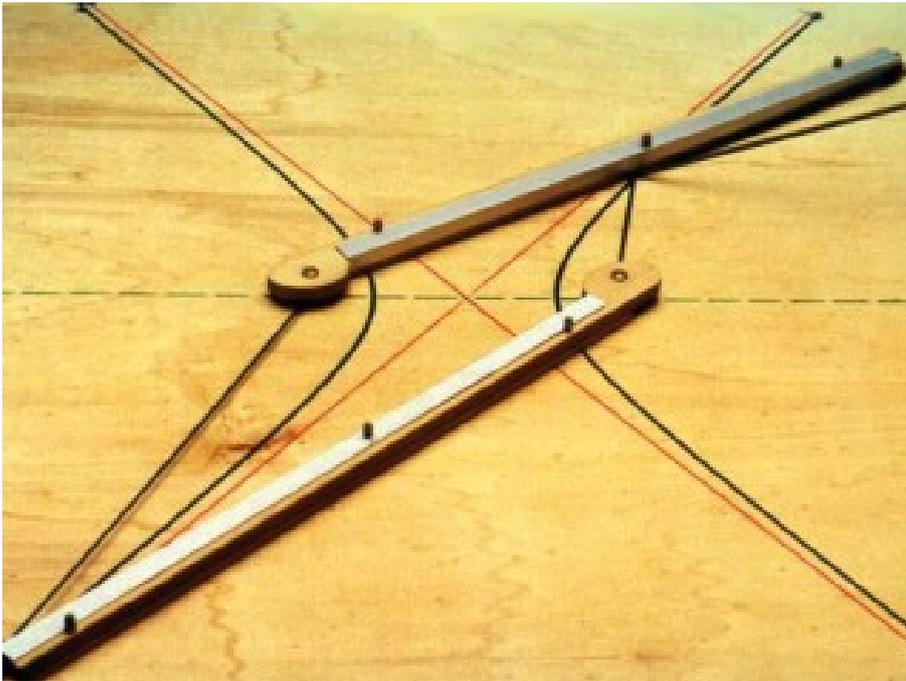


FIGURE 11 – "Machine" à hyperbole.

2 Deuxième démarche

Jusqu'à présent, nous n'avons fait "que des maths"!
Et la physique là-dedans ?

A Newton et la géométrie

En 1665, Newton utilise une version de l'"analyse" assez différente de celle que nous utilisons aujourd'hui. Sa méthode est basée sur la manipulation de séries infinies.

La méthode, plus "moderne" de Leibniz est connue de Newton. Mais, dans l'édition de 1687 des "Philosophiae naturalis principia mathematica", Newton adopte une troisième démarche qu'il trouve clairement plus satisfaisante : appelons la "analyse géométrique".

a) Encore un peu de math

Pour illustrer les aspects très satisfaisants de cette démarche, traitons de la dérivée de la fonction tangente.

Ne faisons pas ici la démonstration en utilisant la définition "classique" de la dérivée comme limite du quotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Mais nous savons que cette démarche n'est pas des plus faciles les premières fois où on la découvre. Elle apparaît même alors assez artificielle.

Cependant, si nous connaissons le résultat, il nous permet d'écrire ceci :

$$\text{Posons } T = \tan \theta \quad (8)$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (9)$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad (10)$$

$$= 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad (11)$$

$$= 1 + T^2 \quad (12)$$

Maintenant, abordons la question du point de vue de la géométrie.

Soit un triangle ABC , rectangle en B et tel que la longueur $\|AB\| = 1$.

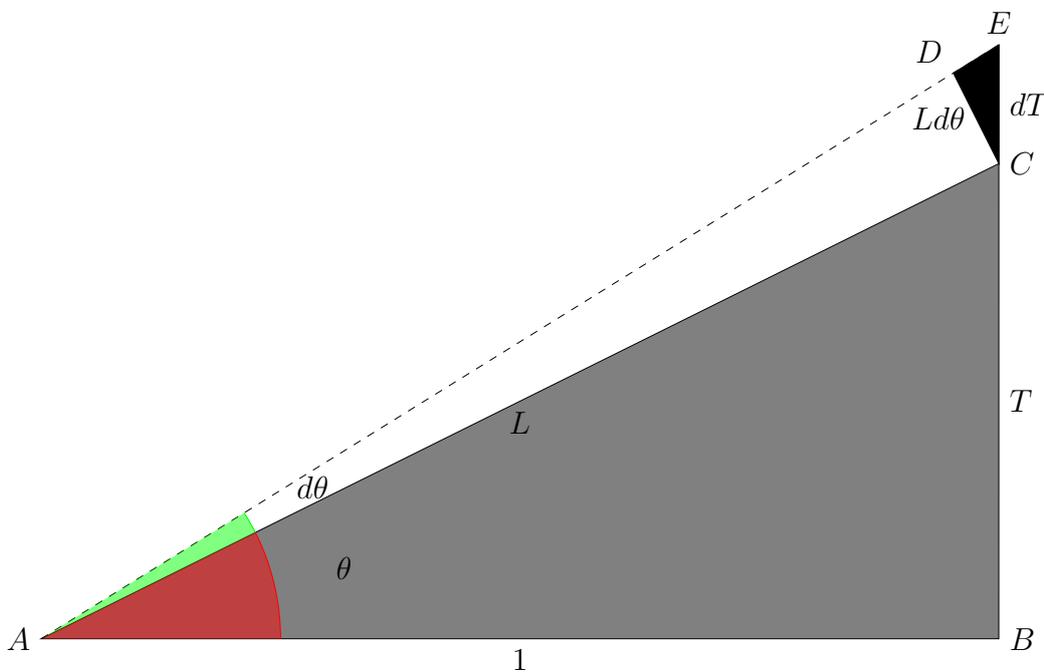


FIGURE 12 – "Analyse géométrique" : dérivée de la tangente.

La longueur T du côté BC est bien égale à $\tan \theta$.

Si on fait un accroissement dT infinitésimal, alors les triangles ABC et CDE sont semblables.

Dès lors

$$\frac{dT}{Ld\theta} = \frac{L}{1} \quad (13)$$

$$\text{et donc} \quad \frac{dT}{d\theta} = L^2 \quad (14)$$

$$= 1 + T^2 \quad (15)$$

Et on retrouve la relation 12 p. 9, mais la manière d'y arriver a impliqué les triangles semblables et pas de calcul de limite!

On peut alors en déduire que

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (16)$$

B Finalement de la physique

En supposant que cela a été démontré par ailleurs, acceptons la conservation du moment angulaire³.

Intéressons-nous à ce qui se passe pour un petit Δt .

Supposons que c'est le Soleil qui se trouve au foyer F_1 . Renommons donc ce point S , le point P désignant alors la position de la planète.

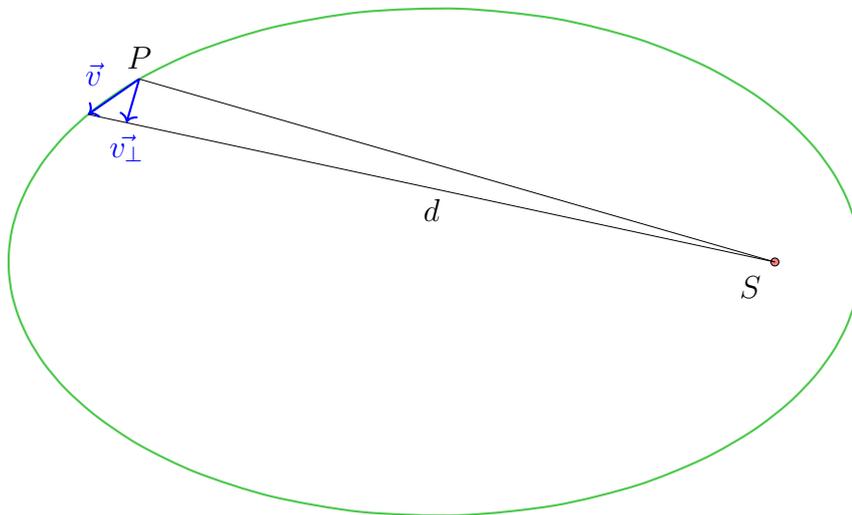


FIGURE 13 – Vitesse \vec{v} pour un petit Δt .

Si ce Δt est petit, alors la distance $\|SP\|$ et la distance d sont pratiquement égales.

L'arc balayé par P pour ce petit Δt peut être assimilé à un triangle.

La surface de l'arc balayé est donc assimilée à celle de ce triangle.

Alors pour ce triangle,

$$\text{Base} = d \quad (17)$$

$$h = v_{\perp} \cdot \Delta t \quad (18)$$

$$S = \frac{1}{2} d \cdot v_{\perp} \cdot \Delta t \quad (19)$$

3. Historiquement, la conservation du moment angulaire est plutôt déduite de la loi empirique de Kepler.

Mais la conservation du moment angulaire nous dit que, si la force est selon SP , alors

$$d \cdot v_{\perp} \cdot m = \text{cste} \quad (20)$$

Pour autant que m soit constante, on a alors, pour des mêmes Δt

$$S = \text{cste}' \quad (21)$$

Après la première, nous retrouvons donc la deuxième loi de Kepler.

C Ellipsographes

La manipulation de l'ellipsographe à cercle directeur fait directement percevoir la variation de vitesse du point qui "dessine" l'ellipse.

Ceci a peut-être participé à renforcer, par intuition, l'élaboration de la deuxième loi par Kepler.

3 Lien entre la FGU et la trajectoire

Par calcul, nous savons que la force de gravitation universelle (FGU) et la troisième loi de Kepler sont liées. La masse du Soleil se "cache" dans le rapport constant " $\frac{R^3}{T^2}$ ".

Kepler avait lui-même réfléchi à la force attirant les planètes. Mais il avait pris une force en $\frac{1}{r}$. Le problème est qu'alors le Soleil aurait du se trouver au centre de l'ellipse.

Newton a montré qu'il fallait une force en $\frac{1}{r^2}$ pour expliquer la position du Soleil en un des foyers de l'ellipse.

Repassons dans les pas de Newton, mais "à la sauce" de Feynman.

Montrons que c'est la force exprimée par la relation

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (22)$$

qui permet d'expliquer la place du Soleil à un des foyers de l'ellipse.

A Deuxième loi de Kepler

Revenons, tout d'abord, sur la deuxième loi de Kepler.

Celle-ci a pour conséquence que, plus un astre est éloigné du Soleil, plus sa vitesse est petite et inversement, plus un astre est proche du Soleil, plus sa vitesse est grande.

Nous pourrions réexprimer ceci en disant que la vitesse diminue avec la distance " r " entre les P_i et S .

Rappelons que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. La technique de construction de l'ellipse choisie auparavant nous a fourni directement les tangentes en chaque point.

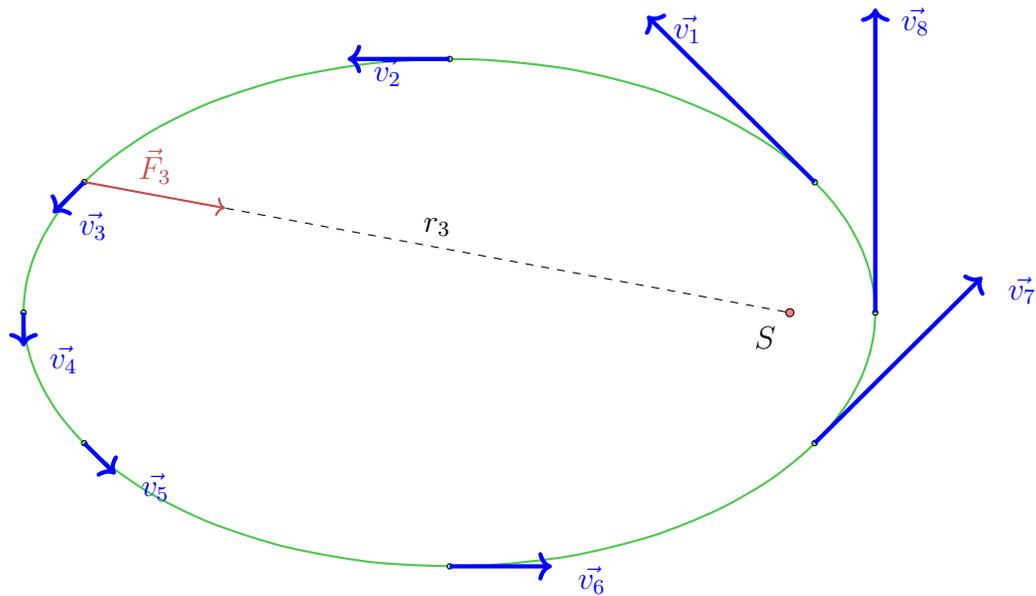


FIGURE 14 – Vitesse \vec{v} et deuxième loi de Kepler.

Mais nous pouvons assumer, dans un premier temps, que nous ne savons pas que l'orbite est elliptique. La conservation du moment angulaire, qui nous a servi à justifier la deuxième loi de Kepler, suppose uniquement une force "centrale", c'est-à-dire dirigée selon la direction $P_i S$.

B Hodographe et vitesses

Pour établir le lien entre F et l'ellipse, prenons maintenant tous les vecteurs vitesses et plaçons les avec leurs origines en un même point : la figure obtenue s'appelle "l'hodographe" des vitesses.

a) Des secteurs de même angle

Pour construire l'hodographe, commençons par diviser l'orbite en secteurs formant tous le même angle θ par rapport au Soleil.

Traçons alors des vecteurs "hauteurs" perpendiculaires, partant des points P_i , perpendiculaires aux segments " $P_i F_1$ " et reliant chaque P_i au secteur suivant. Nommons, par commodité, $h_{\perp i}$ les longueurs de ces vecteurs.

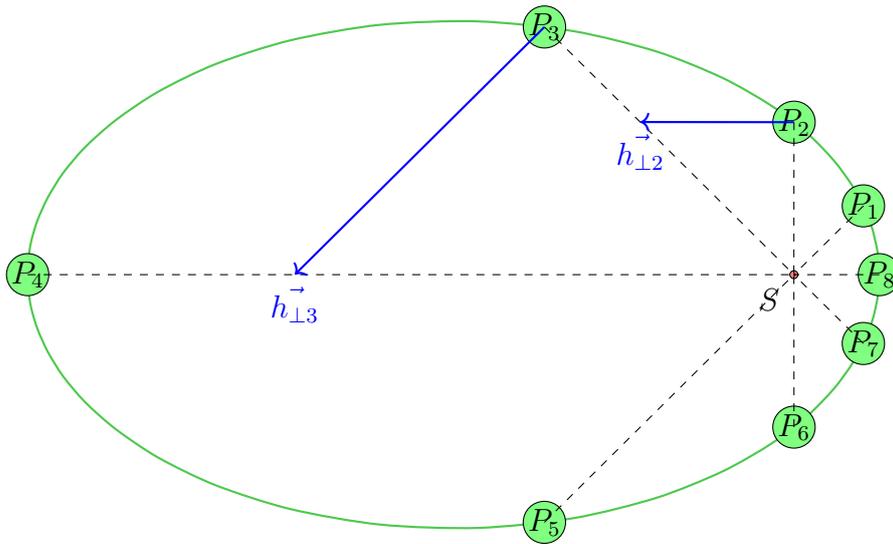


FIGURE 15 – Hodographe : division de l’orbite en secteurs.

Les vecteurs $h_{\perp i}$ sont parallèles aux $v_{\perp i}$ tracés précédemment, mais ces vecteurs $h_{\perp i}$ ne respectent pas la deuxième loi de Kepler.

Ces vecteurs $h_{\perp i}$ sont cependant dans la bonne direction.

Les triangles $F_1 P_i h_{\perp i}$ de notre construction sont isocèles, mais ce n’est pas le cas en général. cela est particulier à notre choix d’angle (45°) pour les secteurs.

Ce qui est relevant, et général, c’est que les triangles $F_1 P_i h_{\perp i}$ sont tous semblables.

b) Temps pour balayer un secteur

Quel est le temps Δt_i nécessaire pour balayer un secteur ?

La deuxième loi nous dit que ce Δt_i doit être proportionnel à la surface S_i de ce secteur.

$$\Delta t_i \sim S_i \tag{23}$$

Donc, plus on est loin du Soleil, plus la distance $r_i = \|P_i F_1\|$ augmente et, de même, la longueur de $h_{\perp i}$ augmente aussi.

Comme précédemment, pour des θ petits, les triangles $F_1 P_i h_{\perp i}$ peuvent être égaux aux secteurs balayés et donc

$$S_i = \frac{r_i h_{\perp i}}{2} \tag{24}$$

Mais comme les triangles sont semblables, pour tous les triangles nous avons

$$h_{\perp i} \sim r_i \tag{25}$$

Dès lors

$$\Delta t_i \sim S_i \quad (26)$$

$$\sim r_i h_{\perp i} \quad (27)$$

$$\sim r_i r_i \quad (28)$$

$$\sim r_i^2 \quad (29)$$

Le temps nécessaire pour balayer un secteur est proportionnel au carré de la distance entre la planète et le Soleil.

c) Principe fondamental de la dynamique à la rescousse

À nouveau, assumons que nous prenons des Δt petits et donc des θ petits⁴.

Supposons que la force F est proportionnelle au carré de la distance entre la planète et le Soleil.

$$F \sim \frac{1}{r^2} \quad (30)$$

Attention, il ne s'agit pas d'un argument circulaire où nous utiliserions ce que nous voulons démontrer à savoir " $F \sim \frac{1}{r^2}$ " pour le démontrer. Nous verrons que, si la force n'est pas proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$, on arrive, in fine, à des contradictions.

Utilisons maintenant le principe fondamental de la dynamique ainsi que la définition cinématique de l'accélération.

$$F = ma \quad (31)$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (32)$$

alors,
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (33)$$

$$\sim \frac{1}{r^2} \quad (34)$$

et
$$\Delta v = a \Delta t \quad (35)$$

$$\sim \frac{\Delta t}{r^2} \quad (36)$$

$$\sim \frac{\Delta t}{\Delta t} \quad (37)$$

$$= \text{cste} \quad (38)$$

Δv est constant pour chaque angle θ successif.

4. Pour alléger l'écriture, oublions les indices i .

d) Variation de vitesse et hodographe

Si Δv est constant pour chaque angle θ successif, alors $\vec{v}_i - v_{i-1}$ est de même longueur pour chaque θ successif.

Inspirons-nous de la figure 14 à la page 12, mais cette fois en prenant des angles égaux.

Donc les $\Delta v_i = \vec{v}_i - v_{i-1}$ sont de longueurs égales.

Comme la force est centrale, l'angle entre les $\Delta \vec{v}_i$ successifs sera toujours θ .

En effet

$$\Delta \vec{v}_i \sim \vec{a}_i \quad (39)$$

$$\sim \vec{F}_i \quad (40)$$

et les \vec{F}_i successifs ont, par construction, un angle θ entre eux.

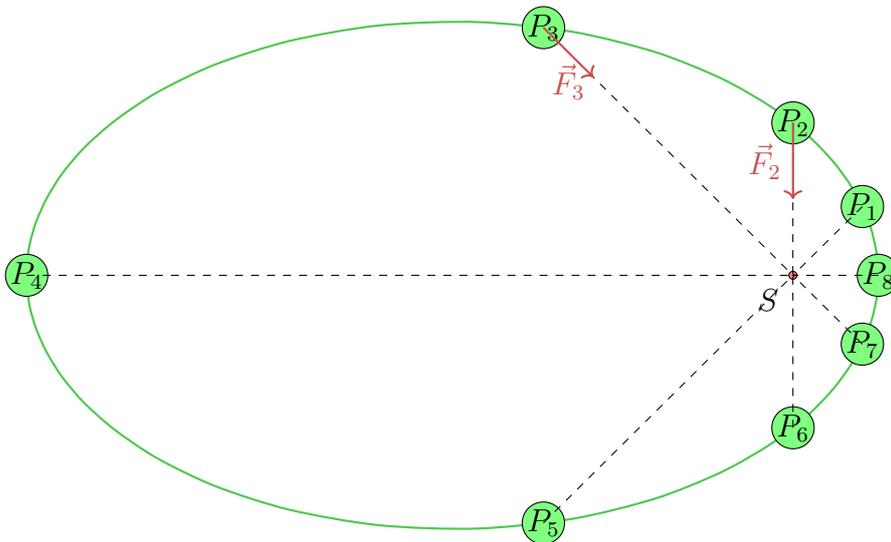


FIGURE 16 – Hodographe : l'angle entre les \vec{F}_i est θ .

Si les angles entre les $\Delta \vec{v}_i$ successifs est θ et qu'ils sont de même longueur, alors ils forment un polygone régulier.

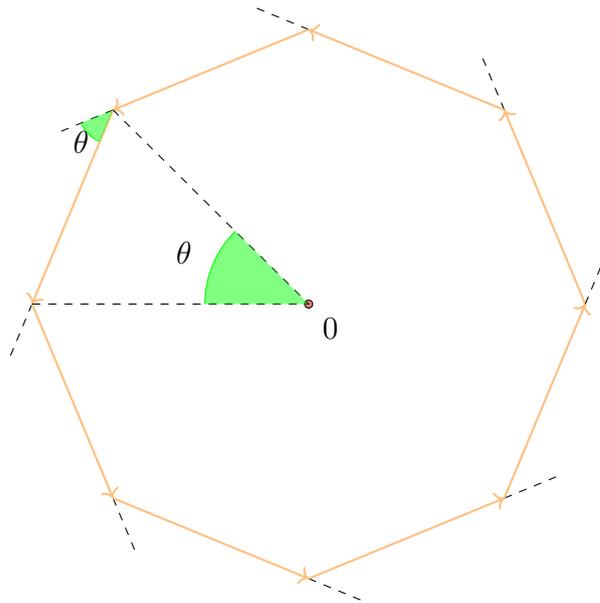


FIGURE 17 – Hodographe : l'angle entre les $\vec{\Delta v}_i$ est θ .

Si l'angle θ diminue, le nombre de côtés du polygone augmente.

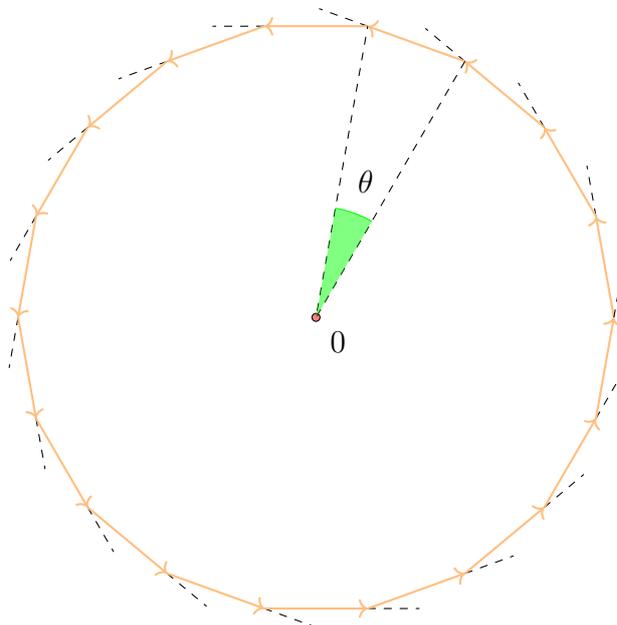


FIGURE 18 – Hodographe : le nombre de côtés du polygone augmente.

Si l'angle devient très petit, le polygone va se rapprocher d'un cercle.

En conclusion, les extrémités des vecteurs vitesses de l'hodographe va former un cercle!

e) Hodographe et ellipse par cercle directeur

Si l'hodographe des vitesses forme un cercle, ceci est vrai même si on ne prend pas des secteurs "d'angles égaux".

Reprenons à nouveau la figure 14 à la page 12. Plaçons, pour l'instant, le centre de l'hodographe à l'extérieur de l'ellipse et, pour tracer l'hodographe, prenons les vecteurs vitesses bien parallèles à ceux tangents à l'ellipse.

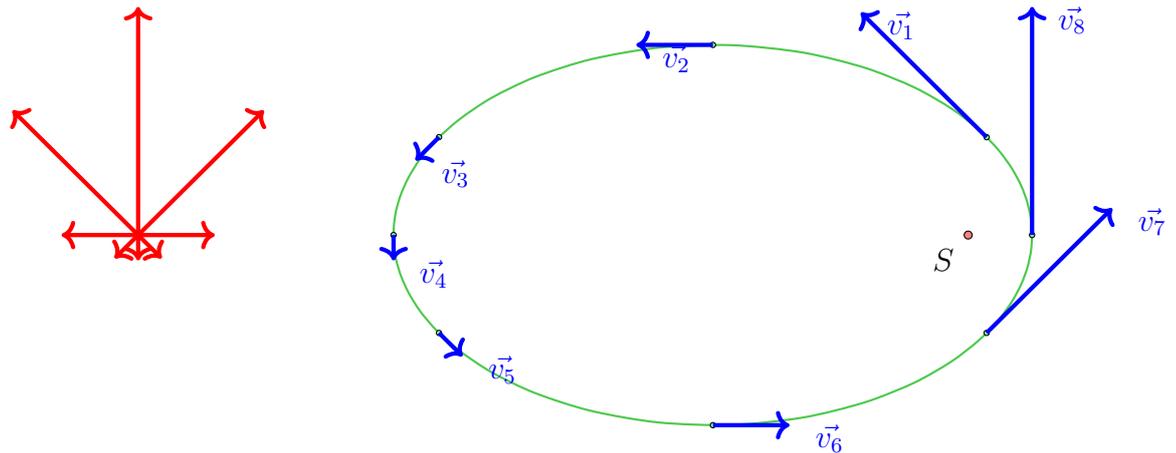


FIGURE 19 – Hodographe : vecteurs vitesses parallèles.

Faisons maintenant tourner l'hodographe d'un quart de tour.

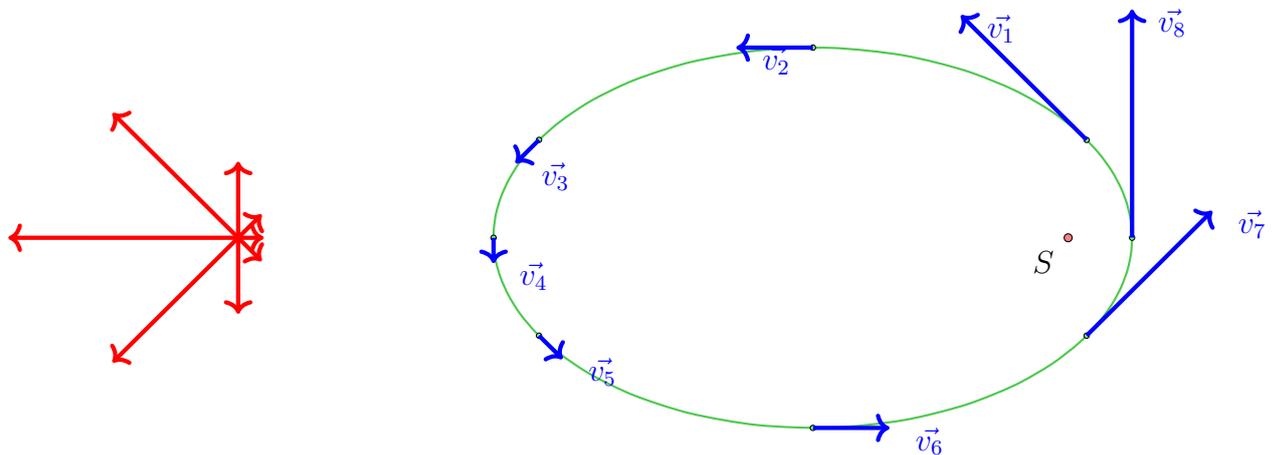


FIGURE 20 – Hodographe : vecteurs vitesses perpendiculaires.

Et, finalement, plaçons ce dernier hodographe au foyer correspondant au Soleil, changeons son échelle et traçons le cercle directeur qui nous a servi à construire l'ellipse.

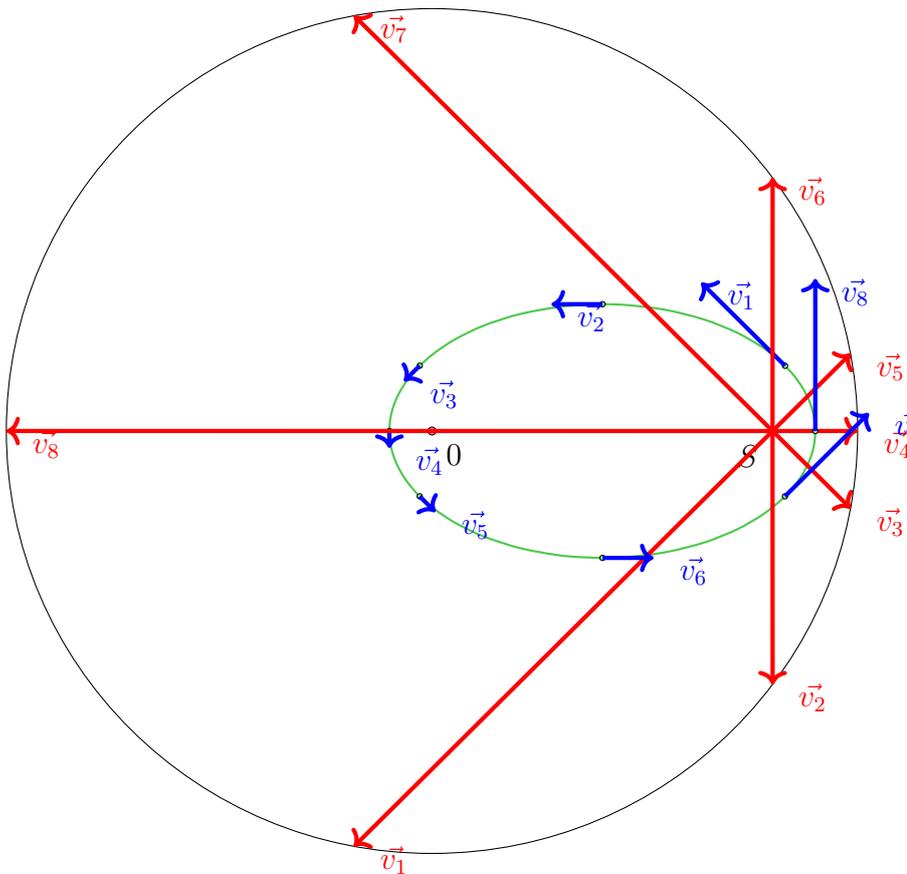


FIGURE 21 – Hodographe et cercle directeur.

f) Angle sur le cercle directeur et sur l'ellipse

Mais quels sont les liens entre l'hodographe et l'ellipse ?

Traçons l'angle formé par deux points de l'ellipse et le foyer "Soleil".
 Traçons ensuite l'angle formé par l'extrémité de deux vecteurs vitesses correspondants sur l'hodographe et le centre du cercle directeur.

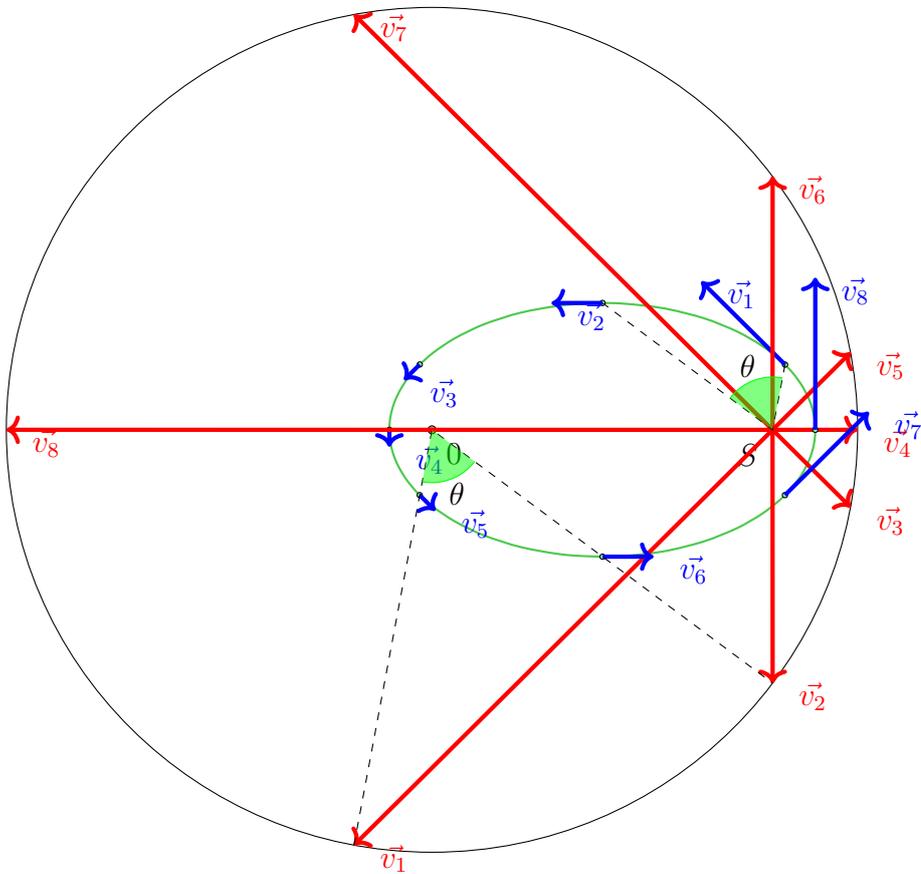


FIGURE 22 – Hodographe : Angle sur le cercle directeur et sur l'ellipse.

Ces angles seront égaux.

L'angle balayé par la "planète" en un temps donné est le même que celui balayé par les vecteurs vitesses sur l'hodographe.

On pourrait construire l'ellipse de la trajectoire à partir de l'hodographe.

C Force de gravitation et ellipse

La construction qui précède repose sur le fait que la force de gravitation soit inversement proportionnelle au carré de la distance.

$$F \sim \frac{1}{r^2} \quad (41)$$

Une autre relation entre force et distance ne permet de construire une ellipse avec le Soleil occupant un des foyers.

D Grandeur de la vitesse et hodographe

Le rapport entre la distance $\|OS\|$ et le rayon du cercle directeur est l'excentricité e de l'ellipse.

La résolution des équations différentielles⁵ pour déterminer la vitesse de la planète dans un système dont l'origine est le Soleil aboutit à ces équations :

$$v_x = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \sin \alpha \quad (42)$$

$$v_y = +\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (e + \cos \alpha) \quad (43)$$

où

- $n = \frac{2\pi}{T}$ est la vitesse angulaire moyenne,
- a est la longueur du demi-grand axe de l'ellipse
- et où α est l'angle centré sur le Soleil que fait la position de la planète avec le demi-grand axe.

Nous pouvons aussi écrire ces équations comme suit :

$$v_x = -k \sin \alpha \quad (44)$$

$$v_y = +k (e + \cos \alpha) \quad (45)$$

Si nous égalons k au rayon du cercle, nous pouvons vérifier ces relations sur la figure suivante qui est, à nouveau, une itération sur la précédente.

5. MURRAY, *Solar system dynamics*, p. 31.

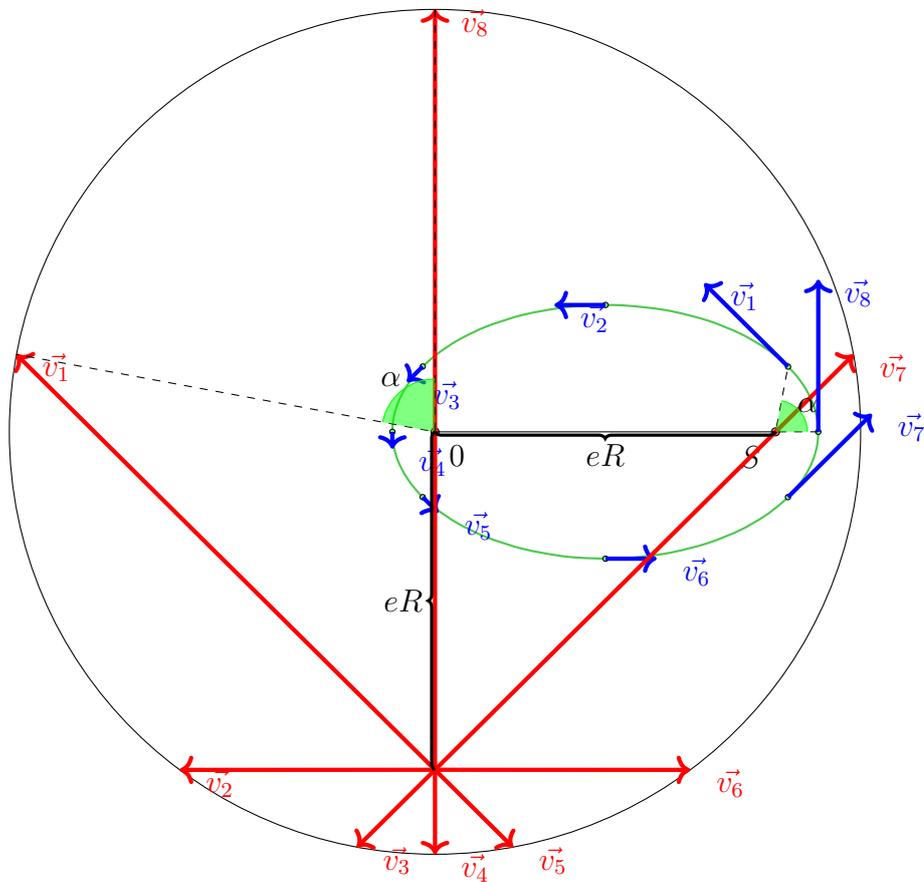


FIGURE 23 – Hodographe : $v_x = -k \sin \alpha$ et $v_y = +k(e + \cos \alpha)$.

4 Conclusion

Nous n'avons pas tout couvert dans ce déjà trop long texte. Nous aurions pu faire plus le parallèle entre les équations du mouvement et les résultats montrés ici. Mais ni Newton ni Feynmann ne résolve d'équation différentielle pour traiter cette question.

À une époque où l'informatique est omniprésente, la résolution des équations différentielles permet de mettre des satellites sur orbite et les méthodes explorées ici peuvent sembler bien désuètes.

Mais ces méthodes géométriques, qui étaient fort révérees⁶ aux époques de Kepler et Newton, permettaient de répondre à des questions avec élégances. Elles permettaient aussi la construction de "machines" qui ont contribué à la révolution scientifique de ces temps.

6. "Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre."

Kepler comme Newton ont conçu et réalisé des instruments d'optique toujours utilisés aujourd'hui. On a reproché à Galilée de mêler mathématique et mécanique.

Pour nous, établir le rapport entre lois de Kepler et lois de Newton via la géométrie a été très satisfaisant.

Nous espérons que cela le fût pour vous aussi.

5 Bibliographie

A Livres

- FERGUSON, Kitty. *Tycho & Kepler : the unlikely partnership that forever changed our understanding of the heavens*. New York : Walker & Company, 2002. ISBN : 9780802713902.
- GOODSTEIN, David & Judith. *Feynman's lost lecture : the motion of planets around the sun*. London : Vintage, 1997. ISBN : 9780099736219.
- KOESTLER, Arthur. *The sleepwalkers : a history of man's changing vision of the Universe*. London New York : Arkana, 1989. ISBN : 9780140192469.
- MURRAY, Carl. *Solar system dynamics*. Cambridge New York : Cambridge University Press, 1999. ISBN : 9780521575973.
- NEEDHAM, Tristan. *Visual complex analysis*. Oxford New York : Clarendon Press Oxford University Press, 1997. ISBN : 9780198534464.
- NEWTON, Isaac. *Principia : principes mathématiques de la philosophie naturelle*. Paris : Dunod, 2011. ISBN : 9782100566273.

Table des matières

1 Première démarche	1
A Enveloppe	2
a) Une première figure	2
B Avec des points	3
a) Démonstration	4
(i) Triangle F_1PQ	4
(ii) Droite PM	5
C Variante	6
D Les machines à dessiner des coniques	7
2 Deuxième démarche	8
A Newton et la géométrie	8
a) Encore un peu de math	8
B Finalement de la physique	10
C Ellipsographes	11
3 Lien entre la FGU et la trajectoire	11
A Deuxième loi de Kepler	11
B Hodographe et vitesses	12
a) Des secteurs de même angle	12
b) Temps pour balayer un secteur	13
c) Principe fondamental de la dynamique à la rescousse	14
d) Variation de vitesse et hodographe	15
e) Hodographe et ellipse par cercle directeur	17
f) Angle sur le cercle directeur et sur l'ellipse	18
C Force de gravitation et ellipse	19
D Grandeur de la vitesse et hodographe	20
4 Conclusion	21
5 Bibliographie	23
A Livres	23